



Н. Я. Виленкин, А. Г. Мордкович

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЗАОЧНЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Н. Я. Виленкин, А. Г. Мордкович

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ЗАОЧНИКОВ I КУРСА
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФАКУЛЬТЕТОВ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
1983



*Рекомендовано Главным управлением
высших и средних педагогических учебных заведений
Министерства просвещения РСФСР*

Р е ц е н з е н т ы:

доктор физико-математических наук, профессор *С. Я. Хавинсон*
(МИСИ им. В. В. Куйбышева),
доктор физико-математических наук, профессор *М. И. Граев* (МГЗПИ),
кафедра математического анализа Коломенского педагогического института
(зав. кафедрой кандидат физико-математических наук, доцент *В. Г. Чернов*)

Редактор МГЗПИ *О. А. Павлович*

Виленкин Н. Я., Мордкович А. Г.

В44 Математический анализ. Введение в анализ: Учеб. пособие для студентов-заочников I курса физ.-мат. фак. пед. ин-тов. — М.: Просвещение, 1983. — 191 с., ил. — В надзаг.: Моск. гос. заоч. пед. ин-т.

В $\frac{4309020400-530}{103(03)-83}$ **заказное**

**ББК 22.16
517.2**

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга входит в серию учебных пособий для студентов-заочников по курсу «Математический анализ и теория функций», выпущенную издательством «Просвещение» под общей редакцией профессора Н. Я. Виленкина: Н. Я. Виленкин и Е. С. Куницкая — «Введение в анализ» (1973 г.), Н. Я. Виленкин, Е. С. Куницкая и А. Г. Мордкович — «Дифференциальное исчисление» (1978 г.), «Интегральное исчисление» (1979 г.), Н. Я. Виленкин, В. В. Цукерман, М. А. Доброхотова, А. Н. Сафонов — «Ряды» (1982 г.), Н. Я. Виленкин, М. Б. Балк, В. А. Петров — «Мощность, метрика, интеграл» (1980 г.). Готовится к печати учебное пособие Н. Я. Виленкина, М. А. Доброхотовой, А. Н. Сафорова «Дифференциальные уравнения». В процессе написания книг этой серии выяснилась необходимость привести первую из них в соответствие с последующими, учесть происшедшее за это время изменение программ и сделать более строгим изложение материала. Эта работа была выполнена Н. Я. Виленкиным и А. Г. Мордковичем, причем произведенные изменения оказались настолько существенными, что получившуюся книгу следует рассматривать как самостоятельную, а не как второе издание ранее вышедшей под тем же названием.

Существенно изменено изложение теории действительных чисел, которое теперь строится на основе предложенной одним из авторов аксиоматики множества положительных действительных чисел. В нее входит лишь 8 аксиом (для сравнения укажем, что аксиоматика множества действительных чисел как архимедовски упорядоченного поля содержит 17 аксиом, см., например: Ш и л о в Г. Е. Математический анализ. — М.: Физматгиз, 1960, ч. I). Предложенные нами аксиомы весьма наглядны, и изучение множества действительных чисел на их основе не вызовет, по нашему мнению, затруднений у студентов.

При этом в качестве аксиомы непрерывности множества действительных чисел выбрана так называемая аксиома о разделяющем числе (если все элементы числового множества X лежат левее элементов числового множества Y , то существует хотя бы одно число, разделяющее эти множества). Эта аксиома, опирающаяся лишь на отношение порядка в множестве действительных чисел, позволяет во многих случаях упростить введение новых понятий, сводя его к единой схеме (объект вводится как разделяющее число двух числовых множеств, причем остается лишь проверить, что разделяющее число однозначно определено, а это делается каждый раз одним и тем же образом). В частности, в данной книге этим путем определяются произведение и частное действительных чисел, дается определение степени с иррациональным показателем и т. д.

Изложение понятия предела функции начинается со случая предела функции бесконечно малой при $x \rightarrow +\infty$. Этот случай допускает наглядную физическую трактовку (процессы выравнивания) и геометрическую иллюстрацию (горизонтальная асимптота). Другие виды пределов (предел функции в точке, бесконечные пределы, предел последовательности и т. д.) сводятся к этому исходному случаю. Использование бесконечно малых функций позволило облегчить вывод многих теорем о пределах. При этом все изложение ведется таким образом, чтобы будущий учитель был готов к преподаванию понятия предела в школе на трех уровнях строгости: наглядно-интуитивном, более строгом, но не формализованном и на языке « ε — δ ».

Большое внимание уделяется изучению элементарных функций. При этом в начале курса рассматриваются лишь рациональные, иррациональные и тригонометрические функции. При построении теории пределов и изучении непрерывности функций, а также при выработке техники вычисления пределов используются лишь функции этих классов. Такая методика позволяет акцентировать внимание студентов именно на основных понятиях введения в анализ, которые, по нашему мнению, зачастую плохо усваиваются не из-за сложности самих понятий, а из-за пестроты и многообразия используемого аппарата элементарных функций.

После доказательства теоремы существования и непрерывности обратной функции вводятся обратные тригонометрические функции, на примере которых вновь повторяются все ранее изученные понятия (область определения, преобразования графиков, вычисление пределов и т. д.). При этом сама теорема доказывается на основе утверждения о том, что для непрерывности монотонной на отрезке $[a; b]$ функции необходимо и достаточно, чтобы множеством ее значений на этом отрезке был отрезок.

В конце книги вводятся на основе уже имеющихся знаний о пределах и непрерывных функциях степень с иррациональным показателем и, далее, показательная и логарифмическая функции, для которых вновь повторяются ранее изученные понятия. Мы считаем, что предложенная последовательность изучения облегчит студенту как усвоение свойств элементарных функций и установление связей между ними, так и понимание основных идей теории пределов и выработку техники вычисления пределов.

К сожалению, соображения, связанные с необходимостью приобщить излагаемый курс к потребностям школы и по возможности упростить изложение материала для студентов-первокурсников заочных отделений, заставили авторов при введении тригонометрических функций использовать такие геометрические понятия, как координатная окружность, величина дуги, абсцисса и ордината точки, не давая им точных аналитических определений. По тем же соображениям показательная функция вводится принятым в школе образом: определяется степень с иррациональным показателем, после чего доказываются свойства этой степени (чем закрывается пропуск в школьном изложении) и на этой основе определяется показательная функция и доказываются ее свойства. По мнению авторов, более экономным и идей-

ным является введение показательной функции на аксиоматической основе и вывод свойств степеней с иррациональным показателем из свойств показательной функции. Они надеются дать такое изложение при переработке пособия по интегральному исчислению.

Отметим, что, как и в предыдущем издании, используются теоретико-множественные понятия и обозначения, равно как и обозначения математической логики. В частности, рассматривается понятие предела функции по множеству, позволяющее объединить такие случаи, как односторонние пределы, предел по сходящейся последовательности и т. д. Педагогический опыт авторов показывает, что использование таких обозначений облегчает студентам усвоение материала, позволяя, например, без особых затруднений формулировать отрицание того, что данное число является пределом функции, и т. д.

В то же время авторы отказались от некоторых казавшихся заманчивыми идей — введения с самого начала понятия метрического пространства, изложения теории числовых рядов одновременно с изучением сходимости последовательностей и т. д. По их мнению, запас метрических пространств, которым располагают студенты в начале обучения, слишком мал, чтобы оправдать введение столь абстрактного понятия, а раннее изучение теории числовых рядов повлекло бы слишком существенную ломку существующих программ (хотя и было бы, возможно, целесообразным). Заметим, впрочем, что в отдельных местах пособия мы отклонялись от действующих программ в сторону их сокращения. Курс «Введение в анализ» столь насыщен новыми и важными понятиями, что вряд ли стоит включать в него понятия и факты, без которых легко можно обойтись.

Авторы будут благодарны за замечания о возможных упущениях и недостатках изложения, которые просят присылать либо по адресу: Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, д. 41, издательство «Просвещение», либо: Москва, Верхняя Радищевская улица, д. 18, МГЗПИ, Редакционно-издательский отдел.

§ 1. ОТОБРАЖЕНИЯ МНОЖЕСТВ И ИХ ВИДЫ

1. Отображения множеств. В курсе математического анализа часто рассматривают различные отображения множеств¹.

О п р е д е л е н и е 1.1. Пусть X и Y — некоторые множества и $A \subset X$. Если каждому элементу $x \in A$ поставлен в соответствие один и только один элемент $y \in Y$, то говорят, что задано *отображение из X в Y с областью задания A* . Множество X называется *областью отправления* данного отображения, а Y — его *областью прибытия*. Отображения из X в Y обозначаются малыми латинскими буквами (строчными): f, g, h и т. д.

П р и м е р 1. Пусть X — множество выпуклых четырехугольников, Y — множество окружностей и f — соответствие, которое сопоставляет четырехугольнику из X вписанную в него окружность. Так как в данный четырехугольник можно вписать не более одной окружности, то имеем отображение из X в Y . Областью задания A этого отображения является множество четырехугольников, в каждый из которых можно вписать окружность, т. е. четырехугольников, у которых суммы длин противоположных сторон равны.

П р и м е р 2. Пусть X и Y — множество \mathbf{R} действительных чисел, и пусть числу x ставится в соответствие число y , такое, что $y \geq 0$ и $y^2 = x$. Здесь область задания A состоит из неотрицательных чисел x .

О п р е д е л е н и е 2.1. Элемент $y \in Y$, соответствующий элементу $x \in X$ при отображении из X в Y , называют *образом элемента x* и обозначают $f(x)$. Если $X_1 \subset X$, то *образом множества X_1* называют множество всех элементов вида $f(x)$, $x \in X_1$:

$$f(X_1) = \{y | y = f(x), x \in X_1\}.$$

В частности, $f(A)$, где A — область задания отображения, называют *множеством значений* отображения f :

$$f(A) = \{y | y = f(x), x \in A\}.$$

Если f — отображение из X в Y с областью задания A и $X_1 \subset X$, то, полагая $f_1(x) = f(x)$ для $x \in X_1 \cap A$, получаем отображение f_1 из X_1 в Y . Его называют *сужением f на X_1* .

¹ О множествах и операциях над ними см.: Варпаховский Ф. Л., Солодовников А. С. Алгебра: Элементы теории множеств. Линейные уравнения и неравенства. Арифметические векторы. Матрицы и определители. — 2-е изд. — М.: Просвещение, 1981, с. 5—16.

О п р е д е л е н и е 3.1. Пусть f — отображение из X в Y и $y \in Y$. *Полным прообразом элемента y* называют множество всех таких элементов $x \in X$, что $f(x) = y$. Это множество обозначают $f^{-1}(y)$. Значит, по определению

$$f^{-1}(y) = \{x | f(x) = y\}.$$

Если $Y_1 \subset Y$, то *полным прообразом множества Y_1* называют объединение полных прообразов элементов из Y_1 .

Полный прообраз множества Y_1 обозначают $f^{-1}(Y_1)$:

$$f^{-1}(Y_1) = \{x | f(x) \in Y_1\}.$$

П р и м е р 3. Пусть X — множество треугольников, Y — множество действительных чисел и f — отображение, ставящее в соответствие каждому треугольнику его периметр. В этом случае $f(x)$ для данного треугольника x означает периметр этого треугольника; для $y \in Y$ множество $f^{-1}(y)$ пусто, если $y \leq 0$, и состоит из всех треугольников с периметром y , если $y > 0$ ¹.

В следующих ниже определениях введем четыре важных типа отображений.

О п р е д е л е н и е 4.1. Если область задания отображения f из X в Y совпадает с областью отправления X , то f называют *отображением X в Y* (т. е. опускают предлог «из», используемый в определении 1.1).

П р и м е р 4. Отображение из примера 3 является отображением X в Y , так как каждый треугольник имеет периметр.

Отображение f множества X в множество Y обозначают:

$$f : X \rightarrow Y \text{ или } X \xrightarrow{f} Y.$$

О п р е д е л е н и е 5.1. Отображение f из X в Y называют *отображением из X на Y* , если $f(X) = Y$ (т. е. если каждый элемент из Y является образом хотя бы одного элемента множества X). Если при этом $f : X \rightarrow Y$, то говорят, что f — отображение X на Y .

П р и м е р 5. Отображение из примера 3 не является отображением X на Y , так как не всякое число может быть периметром треугольника. Но если заменить Y множеством Y_1 положительных чисел, то получим отображение X на Y_1 .

Отображение f множества X на Y будем обозначать $f : X \xrightarrow{\text{на}} Y$. Эти отображения называют также *сюръективными* (от французского предлога *sur* — на).

О п р е д е л е н и е 6.1. Отображение f из X в Y с областью задания A называют *обратимым*, если разным элементам из A соответствуют разные образы, т. е. если

$$(\forall x_1, x_2 \in A) (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))^2.$$

¹ Иногда рассматривают «вырожденные» треугольники, у которых длины одной или даже всех сторон равны нулю. В этом случае $f^{-1}(0)$ состоит из треугольников, вырождающихся в точку.

² Знак \forall читается: «для всех» или «для любых» — и называется *квантором всеобщности*. Знак \Rightarrow читается: «следует».

Иными словами, отображение f из X в Y обратимо в том и только в том случае, когда каждый элемент $y \in Y$ имеет не более одного прообраза (ни одного прообраза, если $y \notin f(X)$), и лишь один прообраз, если $y \in f(X)$.

Обратимые отображения называют также *инъективными* (от слова injectio — вложение).

Пример 6. Отображение, ставящее в соответствие каждому числу x его квадрат, не является обратимым, так как числа x и $-x$ имеют одинаковые квадраты. Однако сужение этого отображения на множество неотрицательных чисел обратимо: если x_1 и x_2 — неотрицательные числа, причем $x_1^2 = x_2^2$, то $x_1 = x_2$.

Определение 7.1. Обратимое отображение множества X на множество Y называется *взаимно однозначным соответствием* между этими множествами или, иначе, *биективным отображением X на Y* .

Пример 7. Преобразование поворота является биективным отображением множества точек плоскости на себя.

Пример 8. Тожественное отображение множества X на себя (т. е. такое отображение $E_X : X \rightarrow X$, что $E_X(x) = x$ для всех $x \in X$) биективно.

Пример 9. На рисунке 1, *a—e* изображены два плоских множества X и Y (отрезки и окружности) и задано проектирование X на Y в направлении, указанном стрелкой. Определим, в каком случае имеет место отображение из X в Y ; X в Y ; X на Y . Узнаем, обратимо отображение или нет.

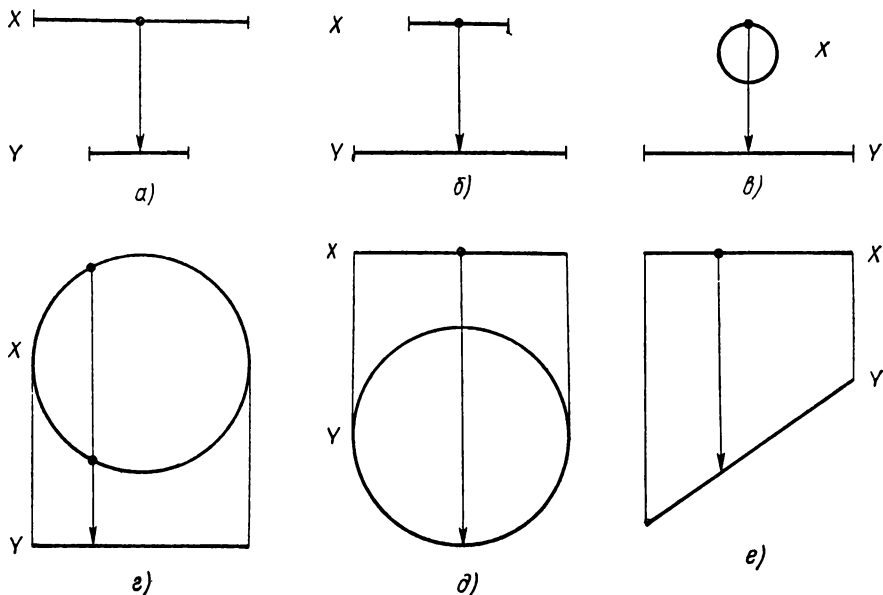


Рис. 1

Решение. Во всех случаях, кроме d , каждому элементу $x \in X$ соответствует не более одного элемента $y \in Y$. Значит, на рисунках $a, b, в, г, e$ имеем отображение из X в Y .

В отображениях из X в Y , представленных на рисунках $б, в, г, e$, областью задания отображения является множество X . Значит, на этих рисунках имеем отображения X в Y , тогда как на рисунке a имеем отображение из X в Y , не являющееся отображением X в Y .

Для отображений, представленных на рисунках $г$ и e , имеем $f(X) = Y$, а отображения на рисунках $б$ и $в$ этим свойством не обладают. Значит, в случаях $г, e$ имеем сюръективные отображения, т. е. отображения X на Y , тогда как на рисунках $б$ и $в$ представлены отображения X в Y , не являющиеся отображениями X на Y .

Для отображений, представленных на рисунках $a, б$ и e , выполняется условие обратимости: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Для отображений, изображенных на рисунках $в$ и $г$, это условие не выполняется. Значит, в случае $б$ мы имеем обратимое отображение X в Y , в случае e — обратимое отображение X на Y или взаимно однозначное соответствие. Отображения, представленные на рисунках $в$ и $г$, необратимы.

О т в е т. На рисунке 1, $a—e$ представлены: a — обратимое отображение из X в Y ; $б$ — обратимое отображение X в Y ; $в$ — необратимое отображение X в Y ; $г$ — необратимое отображение X на Y ; $д$ — соответствие, не являющееся отображением из X в Y ; e — обратимое отображение X на Y .

2. Обратное отображение. Пусть f — обратимое отображение из X в Y с областью задания A . Тогда каждому элементу $y \in f(A)$ соответствует один и только один элемент x , такой, что $f(x) = y$. Поэтому определено отображение f^{-1} множества $f(A)$ в X (на A), задаваемое так: $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$. Если при этом f — отображение всего множества X в Y , то f^{-1} — отображение из Y на X .

О п р е д е л е н и е 8.1. Если отображение f из X в Y обратимо, то отображение f^{-1} из Y в X , задаваемое следующим образом:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y,$$

называется *обратным к f* .

В рассмотренном выше примере 9 в случаях, изображенных на рисунке 1, $a, б$ и e , мы имели обратимые отображения. Для того чтобы получить обратные отображения, необходимо на этих рисунках изменить направление проектирования на противоположное. Заметим, что если отображение f взаимно однозначно, то и отображение f^{-1} является взаимно однозначным отображением Y на X (см. рис. 1, e).

Очевидно, что отображением, обратным отображению E_X (см. пример 8), является самоотображение E_X : $E_X^{-1} = E_X$.

П р и м е р 10. Пусть f — поворот плоскости на угол φ вокруг точки O . Тогда f^{-1} — поворот плоскости на угол $-\varphi$ вокруг той же точки O .

3. Композиция отображений. Пусть f — отображение X в Y , а g — отображение Y в Z . Отображение X в Z определим следующим образом: элементу $x_0 \in X$ ставится в соответствие элемент $z_0 = g(f(x_0))$.

множества Z , где $y_0 = f(x_0)$. Иными словами, $x_0 \rightarrow g(f(x_0))$. Это отображение задано на всем множестве X . Его называют *композицией* отображений f и g и обозначают $g \circ f$. Таким образом, для всех $x \in X$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Обобщим понятие композиции отображений. Пусть f — отображение из X в Y , а g — отображение из Y в Z . В этом случае $g \circ f$ определено на множестве $X_1 = f^{-1}(Y_1 \cap f(X))$, где Y_1 — область задания для g .

Пример 11. Пусть f — поворот плоскости на угол φ вокруг точки O , а g — поворот плоскости вокруг той же точки на угол ψ . Тогда $g \circ f$ — поворот вокруг точки O на угол $\varphi + \psi$.

Операция композиции отображений обладает свойством ассоциативности:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Для проверки достаточно заметить, что и $((h \circ g) \circ f)(x)$ и $(h \circ (g \circ f))(x)$ равны $h(g(f(x)))$.

Если отображения $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ обратимы, то обратимо и отображение $g \circ f$, причем

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

В самом деле, если $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$, а тогда $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$, и потому отображение $g \circ f$ обратимо. При этом если $y = f(x)$, $z = g(y)$, то $y = g^{-1}(z)$, $x = f^{-1}(y) = f^{-1}(g^{-1}(z))$. Это значит, что $(g \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(g^{-1}(z)) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z)$.

Предоставим читателю проверить, что для любого отображения $f: X \rightarrow Y$ имеют место равенства $g \circ E_X = g$, $E_Y \circ f = f$.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение отображения из X в Y , X в Y , X на Y . Приведите примеры таких отображений.
2. Что такое область задания отображения? Что такое область отправления отображения? Всегда ли они совпадают?
3. Что такое образ элемента $x \in X$ при отображении f из X в Y ? Что такое полный прообраз элемента $y \in Y$ при отображении f ?
4. Какое множество называется множеством значений отображения?
5. Какое отображение называется обратимым? Приведите пример обратимого отображения X в Y ; обратимого отображения X на Y ; необратимого отображения X на Y .
6. Какое соответствие между множествами X и Y называется взаимно однозначным?
7. Что вы можете сказать об образе элемента $x \in X$ при следующих отображениях: а) из X в Y ; б) X в Y ; в) X на Y ?
8. Что вы можете сказать о полном прообразе элемента $y \in Y$ при следующих отображениях f : а) из X в Y ; б) X в Y ; в) X на Y ; г) X в Y , где f обратимо; д) X на Y , где f обратимо?
9. Дайте определение обратного отображения.
10. Что называется композицией отображений? Приведите примеры.

Упражнения

1. Задайте отображение множества треугольников в множество окружностей.
2. Пусть X — множество неотрицательных, а Y — множество действительных чисел. Каждому $x \in X$ поставим в соответствие такое $y \in Y$, что $y^4 = x$. Является ли это соответствие отображением? Будет ли это соответствие отображением, если Y — множество отрицательных чисел?
3. Пусть X — множество неотрицательных рациональных чисел и $Y = X$. Каждому $x \in X$ поставим в соответствие такое $y \in Y$, что $y^2 = x$. Является ли это соответствие отображением X в Y ?
4. Пусть X — множество всех окружностей на плоскости, а Y — множество точек этой плоскости. Каждой окружности поставим в соответствие ее центр. а) Является ли это соответствие отображением X на Y ? б) Является ли оно взаимно однозначным?
5. Пусть X — множество всех точек плоскости, Y — множество точек оси ординат. Каждой точке $x \in X$ поставим в соответствие ее проекцию на ось ординат. Является ли это соответствие отображением X на Y ? Является ли оно взаимно однозначным? Что является полным прообразом точки $y \in Y$?
6. Пусть X — множество всех точек плоскости и l — прямая на этой плоскости. Каждой точке $x \in X$ поставим в соответствие точку $y \in X$, симметричную x относительно прямой l . Является ли это соответствие отображением X на X ? Является ли оно биективным отображением? Что является образом квадрата, представленного на рисунке 2, при указанном отображении? Какие точки переходят сами в себя при этом отображении?
7. На рисунке 3 стрелки идут от x к $f(x)$. Найдите $f(X)$. Является ли это соответствие отображением X на Y ? Является ли это отображением обратимым? Чему равен прообраз элемента y_1 из Y ? а прообраз элемента y_2 ?
8. Пусть X — множество студентов в аудитории, Y — множество столов в аудитории. Каждому студенту ставим в соответствие стол, за которым он сидит. Что является прообразом элемента $y \in Y$? Является ли это соответствие отображением X на Y ? а обратимым? В каком случае $f: X \rightarrow Y$ — взаимно однозначное отображение X на Y ?
9. Существует ли отображение, обратное отображению f , которое ставит в соответствие: а) каждому треугольнику описанную около него окружность; б) каждому квадрату описанную около него окружность; в) каждому квадрату, стороны которого параллельны осям координат, вписанную в него окружность?
10. Докажите, что если f — отображение X на Y , g — отображение Y на Z , то $g \circ f$ — отображение X на Z .

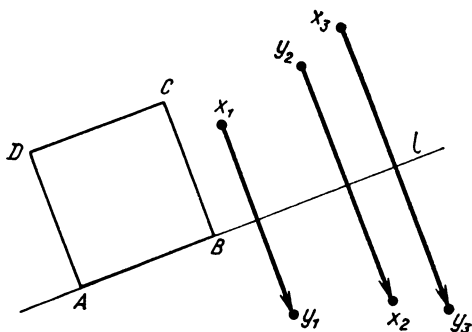


Рис. 2

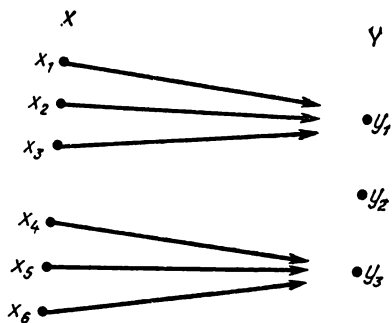


Рис. 3

§ 2. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

4. Аксиомы множества положительных действительных чисел. Одним из основных понятий математики является понятие действительного числа. В средней школе действительные числа определяют как числа, представимые в виде бесконечных десятичных дробей. Но в математике наряду с десятичной системой счисления рассматривают другие системы счисления (двоичную, троичную и т. д.), а потому одно и то же действительное число имеет различные записи в зависимости от того, в какой системе счисления их рассматривают.

Для математического анализа существенное значение имеет не тот или иной способ записи чисел, а свойства множества действительных чисел. Ниже мы укажем те основные свойства действительных чисел, из которых можно вывести все остальные их свойства, т. е. построим множество действительных чисел аксиоматически.

Натуральные числа используются при пересчете элементов конечных множеств, положительные действительные числа — при измерении величин. Сложение и умножение этих чисел отражают определенные операции, производимые над геометрическими и физическими величинами.

В большинстве приложений приходится иметь дело со сложением величин (длин отрезков, площадей фигур и т. д.). Поэтому в качестве основного понятия, свойства которого будут описываться, выберем операцию сложения положительных действительных чисел. Множество положительных действительных чисел обозначим R_+ .

Поскольку измерение величин всегда начинается с выбора единицы измерения, причем мера этой единицы принимается равной числу 1, введем следующую аксиому:

1°. Число 1 является положительным действительным числом, т. е. $1 \in R_+$.

Перечислим теперь аксиомы, описывающие свойства сложения:

2°. Задано отображение $(x, y) \rightarrow z$, сопоставляющее каждой паре (x, y) чисел из R_+ число z из R_+ , называемое суммой чисел x и y и обозначаемое $x + y$. Отображение $(x, y) \rightarrow x + y$ называется сложением чисел x и y .

3°. Операция сложения в R_+ коммутативна:

$$(\forall x, y \in R) x + y = y + x.$$

4°. Операция сложения в R_+ ассоциативна:

$$(\forall x, y, z \in R_+) (x + y) + z = x + (y + z).$$

5°. Сумма $x + y$ отлична от x :

$$(\forall x, y \in R_+) x + y \neq x.$$

Так как $x + y = y + x$, то из аксиомы 5° следует, что $x + y \neq y$.

Аксиомы 1°—5° позволяют определить порядок в множестве действительных чисел:

О п р е д е л е н и е 1.2. Если $x, y \in R_+$ и существует такое $z \in R_+$, что $x + z = y$, то говорят, что x меньше y , и пишут $x < y$, а также говорят, что y больше x , и пишут $y > x$.

Имеют место следующие свойства отношения $x < y$:

а) Ни для одного числа $x \in R_+$ не выполняется $x < x$.

В самом деле, если бы мы имели $x < x$, то это значило бы, что для некоторого $z \in R_+$ $x + z = x$ вопреки аксиоме 5^о.

б) Если $x < y$ и $y < z$, то $x < z$.

В самом деле, из $x < y$ и $y < z$ следует существование таких чисел a и b из R_+ , что $x + a = y$, $y + b = z$. Но тогда

$$z = (x + a) + b = x + (a + b),$$

и потому $x < z$ (поскольку $a + b \in R_+$).

в) Если $x < y$, то неравенство $y < x$ не имеет места.

В самом деле, из $x < y$ и $y < x$ следовало бы, что $x < x$ вопреки свойству а).

г) Если $x < y$, то для любого $z \in R_+$ имеем $x + z < y + z$.

В самом деле, так как $x < y$, то $y = x + a$, где $a \in R_+$, а тогда $y + z = (x + a) + z = (x + z) + a$, и потому $x + z < y + z$.

Из доказанных свойств а) и в) вытекает, что никакие два из соотношений $x = y$, $x < y$, $x > y$ не могут выполняться одновременно, однако из них не следует, что для данных двух чисел x и y имеет место хотя бы одно из этих соотношений. Чтобы иметь возможность сравнивать любые два числа из R_+ , введем следующую аксиому:

6^о. Для любых $x \in R_+$, $y \in R_+$ имеет место одно из соотношений

$$x = y, x < y, x > y.$$

Эта аксиома позволяет определить в R_+ операцию вычитания.

д) Если $x < y$, то существует одно и только одно число $z \in R_+$, такое, что $x + z = y$.

Существование числа z вытекает из определения отношения $x < y$. Докажем единственность z : если z и t — различные числа, то по аксиоме 6^о либо $z < t$, либо $t < z$. Но тогда по свойству г) либо $x + z < x + t$, либо $x + t < x + z$, и потому числа $x + z$ и $x + t$ не могут одновременно равняться y . Число z такое, что $y = x + z$ обозначают $y - x$ и называют разностью чисел y и x .

Из аксиом 1^о и 2^о вытекает, что числа $1 + 1$, $1 + 1 + 1$ и т. д. являются положительными действительными числами. Их называют натуральными числами. Множество натуральных чисел обозначают N — наименьшее подмножество в R_+ , которое содержит число 1 и вместе с каждым числом n содержит число $n + 1$.

Любой отрезок можно разделить на любое число частей одинаковой длины. Поэтому введем следующую аксиому:

7^о. Для любого $x \in R_+$ и любого $n \in N$ найдется такое $y \in R_+$, что $x = y + y + \dots + y$ (n слагаемых).

В дальнейшем сумму $y + y + \dots + y$ (n слагаемых) будем обозначать ny и говорить, что число $x = ny$ кратно числу y . Число y такое, что $ny = x$ однозначно определяется числами x и n (если $z < y$, то $nz < ny$, а если $z > y$, то $nz > ny$). Это число обозначают $\frac{x}{n}$. За-

пись $\frac{m}{n}x$ обозначает число $m \cdot \left(\frac{x}{n}\right)$. Нетрудно проверить, что

$\frac{m}{n}x = \frac{p}{q}x$ в том и только том случае, когда $mq = np$, а также, что $\frac{m}{n}x + \frac{p}{n}x = \frac{m+p}{n}x$. Числа, которые можно представить в виде $\frac{m}{n} \cdot 1$, называют *положительными рациональными числами*. Множество таких чисел обозначают Q_+ . Вместо $\frac{m}{n} \cdot 1$ пишут короче: $\frac{m}{n}$.

Аксиому 7⁰ можно символически записать так¹:

$$(\forall x \in R_+) (\forall n \in N) (\exists y \in R_+) ny = x.$$

Прежде чем сформулировать последнюю аксиому для множества R_+ , введем следующие определения:

О п р е д е л е н и е 2.2. Пусть X и Y — подмножества в R_+ . Говорят, что X *расположено слева от* Y , если для любых $x \in X$, $y \in Y$ выполняется неравенство $x \leq y$ (где $x \leq y$ означает, что $x < y$ или $x = y$).

П р и м е р 1. Множество площадей многоугольников, вписанных в окружность радиуса r , расположено слева от множества площадей многоугольников, описанных вокруг той же окружности.

П р и м е р 2. Множество положительных рациональных чисел, таких, что $x^2 < 2$, расположено слева от множества положительных рациональных чисел, таких, что $x^2 > 2$.

О п р е д е л е н и е 3.2. Число c *разделяет* множества X и Y , если для любых $x \in X$, $y \in Y$ выполнены неравенства $x \leq c \leq y$.

Если существует число c , разделяющее множества X и Y , то X расположено слева от Y . В множестве Q_+ положительных рациональных чисел обратное утверждение не имеет места. Например, для множеств из примера 2 нет разделяющего их рационального числа.

В самом деле, покажем сначала, что нет положительного рационального числа, квадрат которого равен двум. Если бы такое число r существовало, его можно было бы записать в виде несократимой дроби $r = \frac{m}{n}$, причем должно было бы выполняться

равенство $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, т. е. $m^2 = 2n^2$. Но тогда m должно быть четным числом, $m = 2k$, а потому $(2k)^2 = 2n^2$, т. е. $2k^2 = n^2$. Отсюда видно, что и число n четно. Но тогда дробь $\frac{m}{n}$ вопреки предположению сократима.

Предположим теперь, что существует положительное рациональное число c , разделяющее множества X и Y , о которых идет речь в примере 2. Так как $c^2 \neq 2$, то либо $c^2 < 2$, либо $c^2 > 2$. Рассмотрим первый случай. Поскольку $1^2 < 2 < 2^2$, то $1 < c < 2$, и потому $2 - c^2 < 2 - 1^2 = 1$. Положим $\varepsilon = \frac{2 - c^2}{5}$. Тогда $\varepsilon < 1$, причем число $c + \varepsilon$ рационально и

$$(c + \varepsilon)^2 = c^2 + 2c\varepsilon + \varepsilon^2 = c^2 + (2c + \varepsilon)\varepsilon < c^2 + (2 \cdot 2 + 1)\varepsilon = c^2 + \frac{2 - c^2}{5} \cdot 5 = 2.$$

¹ Знак \exists читается: «существует» — и называется *квантором существования*.

Поэтому $c + \varepsilon \in X$. Мы нашли число $c + \varepsilon$ из множества X , большее, чем c , что противоречит определению c . Таким же образом доказывается, что невозможно неравенство $c^2 > 2$. Значит, в множестве положительных рациональных чисел нет числа, разделяющего X и Y .

Следующая аксиома выражает основное свойство множества R_+ положительных действительных чисел, называемое *непрерывностью* этого множества:

8°. Если X и Y — такие непустые подмножества в R_+ , что X расположено слева от Y , то существует хотя бы одно число c , разделяющее эти множества.

Заметим, что такое число, вообще говоря, не является однозначно определенным. Например, множество $\{x | 1 \leq x \leq 3\}$ расположено слева от множества $\{x | 6 \leq x \leq 8\}$, причем их разделяют все числа, заключенные между числами 3 и 6.

Пример 3. Числовые множества, о которых идет речь в примере 1, разделяются единственным числом, а именно площадью круга радиуса r .

Пример 4. Числовые множества, о которых идет речь в примере 2, разделяются единственным числом, а именно числом $\sqrt{2}$.

Аксиомы 1°—8° описывают все основные свойства множества положительных действительных чисел.

5. Координатный луч. Присоединим к множеству R_+ число 0 и обозначим полученное множество R_0 .

Положим, что $0 < x$ для всех $x \in R_+$ и $x + 0 = 0 + x = x$ для всех $x \in R_0$. При этом сохраняются все свойства операции сложения и отношения порядка.

Теперь возьмем луч OM , выберем на нем масштаб, т. е. отрезок OE , длина которого принимается за единицу. Тогда между множеством R_0 и множеством точек луча OM , называемого *координатным лучом*, можно установить взаимно однозначное соответствие: числу 0 ставится в соответствие точка O , а числу $x \in R_+$ ставится в соответствие такая точка P луча OM , что $|OP| = x$.

Установленное соответствие позволяет говорить о числах из R_0 , пользуясь геометрической терминологией. Возьмем два числа $a, b \in R_0$, такие, что $a < b$. Отметим их точками на координатном луче. Если $a < x < b$, то множество $\{x \in R_0 | a < x < b\}$ обозначают $]a; b[$ и называют *интервалом* (или *открытым промежутком*) (рис. 4).

Множество $\{x \in R_0 | a \leq x \leq b\}$ обозначают $[a; b]$ и называют *отрезком* (или *замкнутым промежутком*) (рис. 5).

Множества $\{x \in R_0 | a \leq x < b\}$ и $\{x \in R_0 | a < x \leq b\}$ обозначают соответственно $[a; b[$ и $]a; b]$ и называют *полунтервалами* (или *полуоткрытыми промежутками*) (рис. 6, а, б).

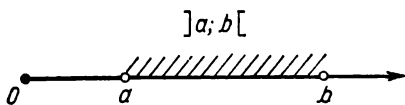


Рис. 4

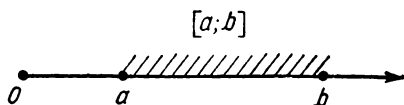


Рис. 5

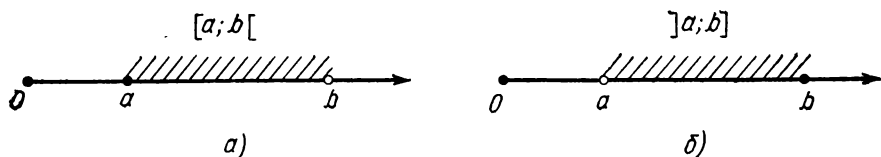


Рис. 6

Множество $\{x \in R_0 | x \geq a\}$ обозначают $[a; +\infty[$ и называют *лучом* (рис. 7, а), а множество $\{x \in R_0 | x > a\}$ обозначают $]a; +\infty[$ и называют *открытым лучом* (рис. 7, б) (луч и открытый луч называются также *бесконечными промежутками* или *полупрямыми*).

Числовая прямая, интервал, отрезок, полуинтервал, луч и открытый луч объединяются общим термином *числовой промежуток*.

6. Условие единственности разделяющего числа. Выше отмечалось, что если X лежит слева от Y , то не всегда эти множества разделяются лишь одним числом. Докажем теорему, дающую необходимое и достаточное условие единственности разделяющего числа.

Т е о р е м а 1.2. Пусть множество X лежит слева от множества Y . Чтобы эти множества разделялись лишь одним числом, необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

Для любого $\varepsilon > 0$ существуют $x \in X$ и $y \in Y$, такие, что $y - x < \varepsilon$:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists x \in X) (\exists y \in Y) y - x < \varepsilon. \quad (1)$$

Наглядный смысл этого условия состоит в том, что разделяющее число единственно, если X и Y сколь угодно близко примыкают друг к другу.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала достаточность этого условия. Предположим, что условие (1) выполнено, но X и Y разделяются двумя числами c и d , где $c < d$. Тогда для любых $x \in X$ и $y \in Y$ мы имели бы $x \leq c < d \leq y$, откуда $y - x \geq d - c$. Это противоречит условию (1) (достаточно положить $\varepsilon = d - c$).

Докажем теперь необходимость условия (1). Пусть множества X и Y разделяются единственным числом, и пусть $\varepsilon > 0$. Так как c — единственное разделяющее число, то число $c - \frac{\varepsilon}{2}$ не разделяет X и Y , хотя Y и лежит справа от $c - \frac{\varepsilon}{2}$ (рис. 8). Поэтому есть хотя бы одно число $x \in X$, такое, что $x > c - \frac{\varepsilon}{2}$. Аналогично устанавливаем

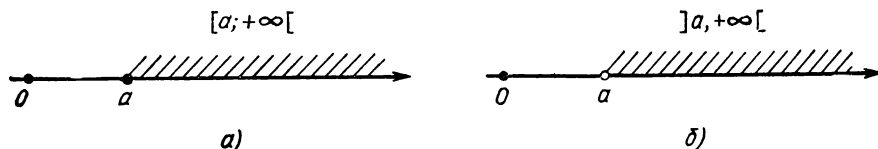


Рис. 7

наличие такого $y \in Y$, что $y < c + \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда имеем $y - x < \left(c + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(c - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$, а потому условие (1) выполнено.

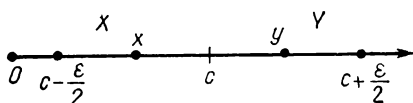


Рис. 8

7. Теорема Евдокса — Архимеда¹ и ее следствия. Отрезок длиной 1 000 000 км гораздо длиннее, чем отрезок длиной 1 микрометр (т. е. 10^{-6} м). Но если повторить ничтожно малый отрезок длиной 1 мкм $2 \cdot 10^{15}$ раз, то получится отрезок длиной 2 000 000 км, т. е. более длинный, чем выбранный нами первоначально громадный отрезок. Это наглядный пример следующего утверждения, применявшегося в трудах древнегреческих математиков Евдокса и Архимеда:

Т е о р е м а 2.2 (Евдокса — Архимеда). Пусть a и b — два положительных действительных числа. Тогда найдется такое натуральное число n , что $na > b$.

Формулировку этой теоремы можно кратко записать так:

$$(\forall a, b \in \mathbf{R}_+) (\exists n \in \mathbf{N}) na > b.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через X множество, состоящее из всех кратных числа a : $X = \{na | n \in \mathbf{N}\}$, а через Y — множество, состоящее из таких чисел y , что $na \leq y$ для всех $n \in \mathbf{N}$. Предположим, что доказываемая теорема ложна, т. е. что для всех $n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $na \leq b$. Тогда множества X и Y непусты (поскольку $a \in X$ и $b \in Y$), причем X лежит слева от Y (поскольку $na \leq y$ для всех $n \in \mathbf{N}$ и всех $y \in Y$). Значит, существует число c , разделяющее эти множества. Для любого $n \in \mathbf{N}$ имеем $na \leq c$ и, в частности, $1 \cdot a \leq c$. При этом $a < c$, так как если $a = c$, то $2a > c$ вопреки неравенству $na \leq c$. Поэтому существует число $c - a$. Так как $c - a < c$, то $c - a \notin Y$, а потому справа от $c - a$ должно лежать хотя одно число вида na . Из неравенства $c - a < na$ следует, что $c < na + a = (n + 1)a$. Но $(n + 1)a \in X$, а это противоречит тому, что c разделяет множества X и Y .

Полученное противоречие показывает, что сделанное предположение ложно, т. е. существует натуральное число n , для которого $na > b$.

С л е д с т в и е 1. Для любого $x \in \mathbf{R}_+$ найдется натуральное число n , такое, что $n > x$.

Для доказательства достаточно положить в теореме Евдокса — Архимеда $a = 1$, $b = x$.

С л е д с т в и е 2. Для любого $x \in \mathbf{R}_+$ найдется натуральное число n , такое, что $\frac{1}{n} < x$.

Для доказательства достаточно положить в теореме Евдокса — Архимеда $a = x$, $b = 1$.

¹ Архимед (287 — 212 до н. э.) — древнегреческий ученый, математик и механик. Евдокс (408 — 355 до н. э.) — древнегреческий математик и астроном.

Следствие 3. Для любого натурального числа n и любого $x \geq \frac{1}{n}$ найдется такое натуральное число m , что $\frac{m}{n} \leq x < \frac{m+1}{n}$.

Доказательство. Из следствия 1 вытекает существование такого натурального k , что $x \leq k = \frac{kn}{n}$. Среди чисел $1, 2, 3, \dots, kn$ есть наибольшее число m , для которого выполняется неравенство $\frac{m}{n} \leq x$. Для этого числа имеем $\frac{m}{n} \leq x < \frac{m+1}{n}$.

Следствие 4. Пусть x и y — числа из R_+ , такие, что $x < y$. Существует хотя бы одно рациональное число r , лежащее между x и y : $x < r < y$.

Доказательство. Пусть $\frac{1}{n} < y - x$ и $\frac{1}{n} < x$. Выберем такое m , что $\frac{m}{n} \leq x < \frac{m+1}{n}$. Тогда имеем $\frac{m+1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} < x + (y - x) = y$, и потому $\frac{m+1}{n}$ лежит между x и y .

Из следствия 4 вытекает, что в любом интервале вида $]a - \delta; a + \delta[$ слева и справа от a имеются рациональные числа. Рациональные числа, принадлежащие этому интервалу и меньшие (соответственно большие), чем a , называют *рациональными приближениями a с точностью до δ по недостатку* (соответственно *по избытку*). Из следствия 3 вытекает, что для любого $a \in R_+$ и любого $\delta < a$, $\delta > 0$, существуют приближения для a по недостатку и по избытку с точностью до δ .

Пример 5. Число 2 является рациональным приближением для $\sqrt{5}$ по недостатку с точностью до 1, а число 3 — рациональным приближением для $\sqrt{5}$ по избытку с той же точностью. В самом деле, $2 < \sqrt{5} < 3$, причем $\sqrt{5} - 1 < 2$ и $3 < \sqrt{5} + 1$.

8. Умножение и деление в R_+ . Операции умножения и деления в R_+ определяются следующим образом:

Определение 4.2. Пусть $x_1 \in R_+$, $x_2 \in R_+$. Произведением чисел x_1 и x_2 называют число, разделяющее множества X и Y , где X составлено из произведений рациональных приближений чисел x_1 и y_1 по недостатку, а Y — из произведений рациональных приближений тех же чисел по избытку¹.

Определение 5.2. Пусть $x \in R_+$. Через $\frac{1}{x}$ обозначают число, разделяющее множества X и Y , где X состоит из чисел вида $\frac{1}{s}$, $s > x$, $s \in Q_+$, Y — из чисел вида $\frac{1}{r}$, $r < x$, $r \in Q_+$. Произведение

¹ В качестве приближений также берутся положительные числа.

$y \cdot \frac{1}{x}$, где $x \in R_+$, $y \in R_+$, называют *частным* от деления y на x и обозначают $\frac{y}{x}$.

Поскольку ясно, что X расположено слева от Y , то хотя бы одно число, разделяющее X и Y , существует.

Доказательство того, что множества, о которых идет речь в определениях 4.2 и 5.2, разделяются единственным числом, опускается. Легко доказать, что арифметические операции в множестве R_+ обладают известными из курса математики средней школы свойствами (коммутативность и ассоциативность умножения, дистрибутивность умножения относительно сложения).

Чтобы определить умножение в R_0 , добавим требования $0 \cdot x = 0$ для любого $x \in R_+$ и $0 \cdot 0 = 0$. Легко проверить, что сохраняются все свойства операции умножения, за исключением того, что символ $\frac{x}{0}$ не определен ни для какого $x \in R_+$, равно как и символ $\frac{0}{0}$.

9. Десятичная запись положительных действительных чисел. Измерение отрезков. Если $x \geq 1$, то найдется такое натуральное число n , что $n \leq x < n + 1$. Число n называют *целой частью* x и обозначают $E(x)$ или $[x]$. При $x < 1$ полагают $E(x) = 0$. Разность $x - E(x)$ называют *дробной частью* числа x и обозначают $\{x\}$. Например, $E(\pi) = 3$, $\left\{\frac{9}{4}\right\} = \frac{1}{4}$.

Пусть $E(x) = n$. Тогда найдется такое n_1 , принадлежащее множеству $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, что $n + \frac{n_1}{10} \leq x < n + \frac{n_1 + 1}{10}$. Далее, найдется n_2 , принимающее значения из этого же множества, что и n_1 , для которого $n + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{100} \leq x < n + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2 + 1}{100}$. Вообще, для любого k найдется такое n_k из множества $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, что

$$n + \frac{n_1}{10} + \dots + \frac{n_k}{10^k} \leq x < n + \frac{n_1}{10} + \dots + \frac{n_k + 1}{10^k}. \quad (2)$$

Сумму $n + \frac{n_1}{10} + \dots + \frac{n_k}{10^k}$ принято записывать в виде конечной десятичной дроби $n, n_1 n_2 \dots n_k$. Тогда (2) принимает вид:

$$n, n_1 n_2 \dots n_k \leq x < n, n_1 n_2 \dots n_k + \frac{1}{10^k}. \quad (3)$$

Бесконечную систему неравенств (3) заменяют записью вида

$$x = n, n_1 n_2 \dots n_k \dots$$

Выражение в правой части этого равенства называют *бесконечной десятичной дробью*. Из того, что в (2) справа стоят строгие неравенства,

вытекает, что бесконечная десятичная дробь не может оканчиваться «хвостом» из девяток. Мы доказали следующее утверждение:

Любое положительное действительное число и ноль можно записать в виде бесконечной десятичной дроби, не оканчивающейся «хвостом» из девяток.

Число 0 имеет запись вида $0, 000...0... .$

Справедливо и обратное утверждение:

Любая бесконечная десятичная дробь, не оканчивающаяся «хвостом» из девяток, является записью некоторого положительного действительного числа или нуля.

В самом деле, поставим в соответствие записи $n, n_1 n_2 \dots n_k \dots$ числа $x_k = n, n_1 n_2 \dots n_k$ и $x'_k = x_k + \frac{1}{10^k}$, где $k \in \mathbb{N}$. Нетрудно проверить, что для любых k и l , таких, что $k < l$, выполняются неравенства $x_k \leq x_l < x'_l \leq x'_k$. Эти неравенства показывают, что множество X , состоящее из чисел x_k , расположено слева от множества Y чисел x'_k . Поэтому имеется число x , разделяющее эти множества. Значит, $x_k \leq x \leq x'_k$. Из условия, что десятичная дробь не оканчивается «хвостом» из девяток, следует, что, начиная с некоторого номера k , имеем $x_k \leq x < x'_k$. Поэтому десятичная запись числа x имеет вид $x = n, n_1 n_2 \dots n_k \dots .$

Итак, мы доказали следующее утверждение:

Теорема 3.2. *Каждое число $x \in \mathbb{R}_0$ может быть записано в виде бесконечной десятичной дроби. Обратно, каждой такой дроби, не оканчивающейся «хвостом» из девяток, соответствует положительное действительное число или ноль.*

З а м е ч а н и е. Бесконечные десятичные дроби, имеющие число 9 в периоде, обычно не рассматривают, так как каждую такую дробь можно заменить дробью с нулем в периоде, например:

$$0,499999... = 0,5000...,$$

$$0,273999... = 0,274000 \dots \text{ и т. д.}$$

Бесконечные десятичные дроби образуют модель, с помощью которой проверяется непротиворечивость аксиоматики множества положительных действительных чисел. Мы будем рассматривать лишь бесконечные десятичные дроби, не оканчивающиеся «хвостом» из девяток, и покажем, как для таких дробей определяются сравнение и арифметические операции.

1. Пусть известны десятичные записи чисел x и y из \mathbb{R}_+ :

$$\begin{aligned} x &= n, n_1 n_2 \dots n_k \dots, \\ y &= m, m_1 m_2 \dots m_k \dots . \end{aligned}$$

Тогда $x < y$ в том и только том случае, когда либо $n < m$, либо найдется такой номер k , что¹ $x_k = y_k$ и $x_{k+1} < y_{k+1}$.

2. Чтобы найти десятичную запись суммы $x + y$, образуем последовательность $x'_1 + y'_1, x'_2 + y'_2, \dots, x'_k + y'_k, \dots$. Тогда, начиная с

¹ Как и выше, через x_k, y_k обозначены десятичные приближения чисел x и y по недостатку, а через x'_k, y'_k — по избытку.

некоторого номера k , целые части этих чисел перестают меняться. Это установившееся значение и будет целой частью суммы $x + y$. Чтобы найти первый знак после запятой для записи $x + y$, нужно взять установившееся значение этого знака в суммах $x'_k + y'_k$ и т. д. Можно доказать, что получающаяся запись суммы $x + y$ не оканчивается «хвостом» из девяток.

3. Точно так же отыскивается десятичная запись разности $x - y$, если $x > y$: надо взять последовательность чисел

$$x'_1 - y_1, x'_2 - y_2, \dots, x'_k - y_k, \dots$$

4. Для получения десятичной записи произведения xu берем последовательность чисел $x'_1y'_1, x'_2y'_2, \dots, x'_ky'_k, \dots$, а для получения десятичной записи для $\frac{1}{x}$ — последовательность чисел $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_k}, \dots$.

Пример 6. Пусть $x = 2,373842\dots$, $y = 1,123562\dots$. Найдем первые три цифры в записи чисел $x + y$, $x - y$, xu .

Решение. Имеем $x_0 = 2$, $x'_0 = 3$; $y_0 = 1$, $y'_0 = 2$;

$$x_1 = 2,3, x'_1 = 2,4; y_1 = 1,1, y'_1 = 1,2;$$

$$x_2 = 2,37, x'_2 = 2,38; y_2 = 1,12, y'_2 = 1,13;$$

$$x_3 = 2,373, x'_3 = 2,374; y_3 = 1,123, y'_3 = 1,124;$$

$$x_4 = 2,3738, x'_4 = 2,3739; y_4 = 1,1235, y'_4 = 1,1236.$$

$$\text{Поэтому } x'_0 + y'_0 = 5, x'_1 + y'_1 = 3,6, x'_2 + y'_2 = 3,51, x'_3 + y'_3 = 3,498, x'_4 + y'_4 = 3,4975.$$

Отсюда видно, что $x + y = 3,49\dots$.

$$\text{Далее, } x'_0 - y_0 = 2, x'_1 - y_1 = 1,3, x'_2 - y_2 = 1,26, x'_3 - y_3 = 1,251, x'_4 - y_4 = 1,2504, \dots. \text{ Отсюда видно, что } x - y = 1,25\dots$$

$$\text{Имеем } x'_0y'_0 = 6, x'_1y'_1 = 2,88, x'_2y'_2 = 2,6884, x'_3y'_3 = 2,668376, x'_4y'_4 = 2,66731404. \text{ Поэтому } xu = 2,66\dots$$

Производя измерение любого отрезка со все возрастающей точностью, получаем последовательность десятичных дробей вида $r_k = n, n_1n_2\dots n_{k-1}$, где $k = 1, 2, \dots$.

Данный отрезок не меньше, чем отрезок длины r_k , но меньше, чем отрезок длины $r_k + \frac{1}{10^{k-1}}$. Это значит, что длина отрезка выра-

жается бесконечной десятичной дробью $n, n_1n_2\dots n_k\dots$ или, что то же самое, положительным действительным числом. Точно так же можно выразить с помощью положительных действительных чисел площади прямоугольников, объемы прямоугольных параллелепипедов и т. д. Множество R_+ достаточно для того, чтобы выразить результат любого измерения. Опираясь на определение произведения положительных чисел, можно доказать, что формулы $S = xu$, $V = xuz$ справедливы для любых положительных чисел x, y, z .

10. Множество действительных чисел и его свойства. Мы построили множество R_+ положительных действительных чисел и дополнили его нулем. Однако в множестве R_0 не всегда выполнима операция вычитания. Чтобы сделать всегда выполнимой и эту операцию, допол-

ним построенное множество совокупностью R_- отрицательных чисел. Отрицательным числом назовем число, представимое в виде $-x$, где $x \in R_+$. Полученное множество $R = R_+ \cup R_- \cup \{0\}$ назовем *множеством действительных чисел*. Операции сложения и умножения в R вводятся так же, как в средней школе:

$$a) (-a) + (-b) = -(a + b);$$

$$б) a + (-b) = \begin{cases} a - b, & \text{если } a > b, \\ 0, & \text{если } a = b, \\ -(b - a), & \text{если } a < b; \end{cases}$$

$$в) (-a)(-b) = ab; \quad д) (-a) + 0 = -a;$$

$$г) (-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -ab; \quad е) (-a) \cdot 0 = 0.$$

Эти операции обладают следующими свойствами:

$$1) a + b = b + a;$$

$$5) ab = ba;$$

$$2) (a + b) + c = a + (b + c); \quad 6) (ab)c = a(bc);$$

$$3) a + 0 = a;$$

$$7) a \cdot 1 = a;$$

$$4) a + (-a) = 0;$$

$$8) a \cdot \frac{1}{a} = 1, a \neq 0;$$

$$9) a(b + c) = ab + ac.$$

Отношение порядка в множестве R определяется точно так же, как и в множестве R_+ : $x < y$ в том и только том случае, когда существует число $z \in R_+$, такое, что $x + z = y$. Исходя из этого определения, легко доказать, что утверждения из п. 4 остаются справедливыми и в R . Кроме того, видно, что если $x < y$, то $-x > -y$. В R справедлива и теорема о разделяющем числе.

Т е о р е м а 4.2. Пусть A и B — два непустых множества действительных чисел, причем A лежит левее B . Тогда существует число, разделяющее множества A и B .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если в A есть числа из R_+ , то мы рассмотрим подмножество A_1 множества A , состоящее из положительных действительных чисел. В этом случае $B \subset R_+$. Применив к множествам A_1 и B , состоящим только из элементов R_+ , аксиому 8° для R_+ , найдем число c , разделяющее множества A_1 и B . Это же число будет разделять множества A и B .

Если в A нет чисел из R_+ , а в B нет чисел из R_- , то разделяющим числом будет нуль.

Если, наконец, в A нет чисел из R_+ , а в B есть числа из R_- , то рассмотрим множества $A' = \{-a | a \in A\}$ и $B' = \{-b | b \in B\}$. Ясно, что B' лежит левее A' , причем в B' есть элементы из R_+ . Тогда, как мы видели в первой части доказательства, существует число, разделяющее множества B' и A' . Это число мы обозначим $-c$. Тогда число c разделяет множества A и B . Теорема доказана.

Остается справедливым и критерий единственности разделяющего числа: для того чтобы два непустых множества A и B действительных чисел, из которых A лежит левее B , разделялись единственным числом, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовали $a \in A$ и $b \in B$, такие, что $b - a < \varepsilon$.

О п р е д е л е н и е 6.2. Модулем действительного числа x называется число $|x|$ такое, что

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Например, $|2,7| = 2,7$; $|-2,7| = -(-2,7) = 2,7$.

Отметим некоторые свойства модуля (они в основном известны читателю из курса средней школы).

1. Для любого числа x справедливо равенство

$$|x| = |-x|.$$

2. Для любых чисел x и y справедливы равенства

$$|xy| = |x| \cdot |y|,$$

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad y \neq 0,$$

$$|x|^2 = x^2.$$

3. Для любого числа x справедливо неравенство $|x| \geq 0$.

4. Для любого числа x справедливо двойное неравенство

$$-|x| \leq x \leq |x|.$$

Доказательство. Если $x \geq 0$, то $x = |x|$; если $x < 0$, то $|x| = -x$, т. е. $|x| > 0$. Тогда $x \leq |x|$.

Объединяя соотношения $x = |x|$, $x < |x|$, получаем $x \leq |x|$.

Аналогично доказывается неравенство $-|x| \leq x$.

В дальнейшем нам будет полезно следующее утверждение о модулях действительных чисел:

Теорема 5.2. *Модуль суммы двух действительных чисел не больше, чем сумма модулей этих чисел:*

$$|x + y| \leq |x| + |y|. \quad (4)$$

Доказательство. Возможны следующие случаи:

- а) оба слагаемых имеют одинаковые знаки;
- б) слагаемые имеют противоположные знаки;
- в) хотя бы одно из слагаемых равно нулю.

Если знаки слагаемых совпадают, то модуль суммы равен сумме модулей слагаемых, т. е. $|x + y| = |x| + |y|$. В этом случае неравенство (4) справедливо. Если слагаемые имеют противоположные знаки, модуль суммы равен разности большего и меньшего из модулей слагаемых, и потому он меньше суммы этих модулей, т. е. $|x + y| < |x| + |y|$.

Наконец, если какое-нибудь из слагаемых равно нулю, например $y = 0$, то доказываемое неравенство снова справедливо, поскольку

$$|x + y| = |x| + |0| = |x|.$$

Теорема доказана.

Все действительные числа, не являющиеся рациональными, называют *иррациональными*. Примерами иррациональных чисел могут служить $\sqrt{2}$, π , $\sqrt[3]{4}$ и т. д. (иррациональность $\sqrt{2}$ была по существу доказана в конце п. 4). Между десятичными записями рациональных и иррациональных чисел существует следующее различие.

В десятичной записи рациональных чисел, начиная с некоторого места, повторяется одна и та же группа цифр (период). Например:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &= 0,333...3... &= 0,(3), \\ \frac{1}{7} &= 0,142857142857... &= 0,(142857), \\ \frac{8}{45} &= 0,1777...7... &= 0,1(7).\end{aligned}$$

Иными словами, десятичные дроби, изображающие рациональные числа, периодичны. Обратно, любая периодическая десятичная дробь задает рациональное число. Например, пусть

$$x = 0,676767... = 0,(67).$$

Тогда $100x = 67,6767... = 67 + x$, и потому $x = \frac{67}{99}$.

Отсюда видно, что иррациональные числа задаются непериодическими десятичными дробями. Например, десятичная дробь $0,101001000100001...$ задает иррациональное число, так как количество нулей между двумя единицами в ней все время возрастает. Множество иррациональных чисел обозначают I .

11. Координатная прямая. Окрестности. По аналогии с тем, как в п. 5 числа из R_0 изображались точками координатного луча, числа из R изображаются точками координатной прямой, т. е. прямой, на которой указано начало отсчета — точка O , положительное направление и масштаб (рис. 9). Например, числу $5,5$ соответствует точка P , такая, что $|OP| = 5,5$, и P лежит справа от O , а числу $-7,3$ соответствует точка M , такая, что $|OM| = 7,3$, и M лежит слева от O . Тот же смысл, что и в п. 5, имеют записи $[a; b]$, $]a; b]$, $[a; b[$, $]a; b[$, $[a; +\infty[$ и $]a; +\infty[$, где $a, b \in R$.

Множество $\{x \in R | x \leq a\}$ называют *лучом* и обозначают $]-\infty; a]$ (рис. 10, а), множество $\{x \in R | x < a\}$ называют *открытым лучом* и обозначают $]-\infty; a[$ (рис. 10, б), само множество R называют *числовой прямой* и обозначают $]-\infty; +\infty[$.

Заметим, что $|x|$ геометрически означает расстояние от точки $M(x)$ до начала координат (рис. 11). Вообще, если $A(a)$ и $B(b)$ — две точки координатной прямой, то расстояние между ними вычисляется по формуле (рис. 12)

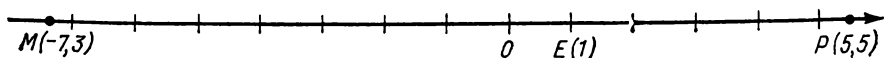
$$|AB| = |b - a|.$$


Рис. 9

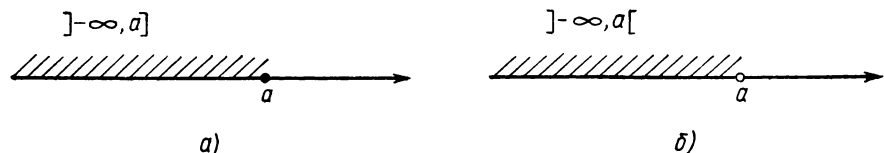


Рис. 10

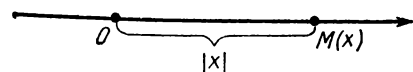


Рис. 11

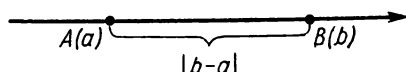


Рис. 12

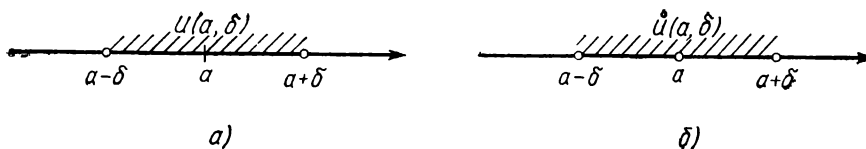


Рис. 13

Введем теперь важное для дальнейшего изложения понятие окрестности точки.

О п р е д е л е н и е 7.2. Интервал вида $]a - \delta; a + \delta[$, где $\delta > 0$, называется δ -окрестностью точки a и обозначается $U(a, \delta)$ (рис. 13, а). Объединение двух интервалов $]a - \delta; a[\cup]a; a + \delta[$ называется *проколотой δ -окрестностью* точки a и обозначается $\mathring{U}(a, \delta)$ (рис. 13, б). Число δ называется *радиусом* окрестности.

Из определения ясно, что проколотая окрестность отличается от окрестности точки a только тем, что отбрасывается сама точка a — *центр* интервала. Проколотая окрестность $\mathring{U}(a, \delta)$ точки a состоит из двух интервалов $]a - \delta; a[$ и $]a; a + \delta[$, называемых *левой и правой δ -полуокрестностями* точки a .

Поскольку $|x - a|$ означает расстояние между точками x и a координатной прямой, то неравенству $|x - a| < \delta$, где $\delta > 0$, удовлетворяют только точки δ -окрестности точки a (рис. 13, а), т. е. высказывания $|x - a| < \delta$ и $x \in U(a, \delta)$ равносильны.

Двойному неравенству $0 < |x - a| < \delta$ удовлетворяют только точки проколотой δ -окрестности точки a (рис. 13, б).

Отметим два свойства окрестностей.

1. *Пересечение двух окрестностей точки a есть окрестность точки a ; пересечение двух проколотых окрестностей точки a есть проколотая окрестность точки a :*

$$U(a, \delta_1) \cap U(a, \delta_2) = U(a, \delta),$$

$$\mathring{U}(a, \delta_1) \cap \mathring{U}(a, \delta_2) = \mathring{U}(a, \delta),$$

здесь $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, т. е. δ — наименьшее из чисел δ_1 и δ_2 (рис. 14).

2. *Любые две точки a и b имеют непересекающиеся окрестности.*

В самом деле, если $\varepsilon = |a - b|$, то окрестности $U\left(a, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ и $U\left(b, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ не пересекаются: если бы нашлась точка $c \in U\left(a, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap U\left(b, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, то имели бы $|a - c| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|b - c| < \frac{\varepsilon}{2}$, и потому $|a - b| = |a - c + c - b| \leq |a - c| + |c - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$,

т. е. $|a - b| < \varepsilon$ вопреки тому, что $|a - b| = \varepsilon$.

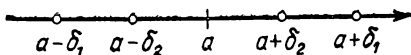


Рис. 14

При рассмотрении многих вопросов (например, при исследовании поведения функций при безграничном возрастании аргумента) удобно считать, что множество R действительных чисел дополнено «идеальным числом» ∞ , которому будет соответствовать «бесконечность». Над этим числом не будут выполняться арифметические действия (т. е. мы не будем складывать бесконечность с действительными числами или умножать бесконечность на бесконечность). Нам понадобятся лишь окрестности (точнее говоря, проколотые окрестности) этого идеального числа.

Ясно, что, чем дальше число x от нуля, тем «ближе» оно к бесконечности. Поэтому введем следующее определение:

О п р е д е л е н и е 8.2. Если $M > 0$, то M -окрестностью $U(\infty, M)$ для точки ∞ называют множество таких чисел x , что $|x| > M$.

Окрестность $U(\infty, M)$ состоит из двух лучей: $]M; +\infty[$ и $]-\infty; -M[$, $M > 0$. Лучи $]M; +\infty[$ и $]-\infty; -M[$ соответственно называются правой и левой полукрестностями точки ∞ и обозначаются $U^+(\infty, M)$ и $U^-(\infty, M)$. В отличие от окрестностей чисел, которые уменьшаются при уменьшении их радиуса δ , окрестность $U(\infty, M)$ уменьшается с возрастанием M : если $M_1 > M_2 > 0$, то $U(\infty, M_1) \subset U(\infty, M_2)$.

Пересечение двух окрестностей $U(\infty, M_1)$ и $U(\infty, M_2)$ является окрестностью $U(\infty, M)$, где $M = \max(M_1, M_2)$.

12. Ограниченные числовые множества. Точная верхняя и точная нижняя грани числовых множеств. Площадь любого многоугольника, лежащего внутри окружности радиуса R , не превосходит площади квадрата, описанного вокруг той же окружности, т. е. числа $4R^2$. Говорят, что множество площадей внутренних многоугольников ограничено сверху числом $4R^2$.

О п р е д е л е н и е 9.2. Число b называется *верхней* (соответственно *нижней*) *гранью множества* X , если для всех $x \in X$ выполняется неравенство $x \leq b$ (соответственно $x \geq b$).

О п р е д е л е н и е 10.2. Множество X называется *ограниченным сверху* (снизу), если оно имеет хотя бы одну верхнюю (нижнюю) грань:

$$(\exists b) (\forall x \in X) x \leq b \quad ((\exists b) (\forall x \in X) x \geq b).$$

Множество X , которое не является ограниченным сверху (снизу), называется *неограниченным сверху* (снизу).

В дальнейшем нам часто придется писать отрицания тех или иных высказываний, содержащих кванторы \forall и \exists . Ясно, что слова «не для всех $x \in X$ верно $p(x)$ » равносильны тому, что «существует $x \in X$, для которого неверно $p(x)$ », а слова «не существует $x \in X$, для которого $p(x)$ » равносильны тому, что «для всех $x \in X$ ложно $p(x)$ ». Поэтому правило построения отрицания таково: каждый квантор \forall заменяется квантором \exists , каждый квантор \exists заменяется квантором \forall , а само утверждение заменяется его отрицанием.

Поскольку отрицанием неравенства $x \leq b$ является $x > b$, а отрицанием неравенства $x \geq b$ является $x < b$, получаем следующее определение неограниченности множества X сверху (снизу).

Определение 11.2. Числовое множество X называется *неограниченным сверху (снизу)*, если выполняется следующее условие:

$$(\forall b) (\exists x \in X) x > b \quad ((\forall b) (\exists x \in X) x < b).$$

Пример 7. Докажем, что множество N натуральных чисел ограничено снизу, но неограничено сверху.

Решение. Так как для всех $n \in N$ имеем $1 \leq n$, то это множество ограничено снизу. Далее, для любого $n \in N$ имеем $n < n + 1$, т. е. существует натуральное число, которое больше, чем n . Значит, множество N не является ограниченным сверху.

Каждое ограниченное сверху множество имеет хотя бы одну верхнюю грань. Но если b — верхняя грань для X и $a > b$, то a тем более является верхней гранью для X . Поэтому ограниченное сверху множество имеет бесконечно много верхних граней. Мы докажем сейчас, что среди этих верхних граней имеется наименьшая.

Теорема 6.2. Пусть X — ограниченное сверху непустое числовое множество. Тогда среди его верхних граней существует наименьшая.

Доказательство. Рассмотрим два числовых множества: данное множество X и множество Y , состоящее из всех верхних граней множества X . Оба эти множества непусты (X — по условию теоремы, а Y — потому что X ограничено сверху). При этом для любых $x \in X$ и $y \in Y$ в силу определения верхней грани выполняется неравенство $x \leq y$, и потому X лежит слева от Y . Но тогда есть число b , разделяющее X и Y . Для любого $x \in X$ имеем $x \leq b$, и потому b — верхняя грань множества X . С другой стороны, для любой верхней грани множества X , т. е. для любого $y \in Y$, имеем $b \leq y$, а это показывает, что b — наименьшая из верхних граней множества X . Теорема доказана.

Аналогично доказываются

Теорема 7.2. Пусть X — ограниченное снизу непустое числовое множество. Тогда среди его нижних граней существует наибольшая.

Определение 12.2. Если множество X ограничено сверху, то наименьшую из его верхних граней называют *точной верхней гранью* этого множества и обозначают $\sup X$ (от латинского слова *supremum* — наибольший).

Определение 13.2. Если множество X ограничено снизу, то наибольшую из его нижних граней называют *точной нижней гранью* этого множества и обозначают $\inf X$ (от латинского слова *infimum* — наименьший).

Пример 8. Для множества X рациональных чисел отрезка $[\sqrt{2}; \sqrt{7}]$ имеем $\inf X = \sqrt{2}$, $\sup X = \sqrt{7}$. В данном случае числа $\inf X$ и $\sup X$ не принадлежат множеству X .

Пример 9. Для множества рациональных чисел отрезка $[1; 4]$ имеем $\inf X = 1$, $\sup X = 4$. Здесь $\inf X$ и $\sup X$ принадлежат X .

Замечание. Чтобы доказать, что $b = \sup X$, нужно доказать два утверждения:

а) для всех $x \in X$ выполняется неравенство $x \leq b$;

б) если $c < b$, то хотя бы для одного $x \in X$ имеем $c < x$ (в против-

ном случае c тоже было бы верхней гранью для X , хотя c меньше, чем b).

Аналогично $b = \inf X$, если:

а) $(\forall x \in X) x \geq b$;

б) $(\forall c > b) (\exists x \in X) x < c$.

Пример 10. Пусть $X = \{x | x = \frac{n}{n+2}, n \in N\}$. Докажем, что $\sup X = 1, \inf X = \frac{1}{3}$.

Решение. Для любого натурального числа n имеем $\frac{n}{n+2} < 1$, а потому 1 — одна из верхних граней для X . Предположим теперь, что $c < 1$. Найдется такое m , что $c < 1 - \frac{1}{10^m}$. С другой стороны, $1 - \frac{n}{n+2} = \frac{2}{n+2}$, а потому при $n > 2 \cdot 10^m$ имеем:

$$1 - \frac{n}{n+2} = \frac{2}{n+2} < \frac{2}{2 \cdot 10^m + 2} < \frac{1}{10^m}.$$

Из этого неравенства следует, что $\frac{n}{n+2} > 1 - \frac{1}{10^m} > c$.

Мы нашли, таким образом, элемент $\frac{n}{n+2} \in X$, такой, что $\frac{n}{n+2} > c$.

Итак, для множества X и числа 1 выполнены оба сформулированных выше утверждения, и потому $\sup X = 1$. Число 1 не принадлежит X .

$$\text{Далее, имеем: } \frac{n}{n+2} = \frac{(n+2)-2}{n+2} = 1 - \frac{2}{n+2}.$$

Отсюда видно, что при увеличении n разность $1 - \frac{2}{n+2}$ увеличивается. Значит, наименьшее значение разности достигается при $n = 1$, и это значение равно $\frac{1}{3}$. Таким образом, $\frac{1}{3}$ — наименьший элемент множества X , а потому $\inf X = \frac{1}{3}$.

Определение 14.2. Множество X , ограниченное снизу и сверху, называется *ограниченным числовым множеством*.

В соответствии с данным определением множество X ограничено в том и только том случае, если имеется $[a; b]$, содержащий это множество (в качестве такого отрезка можно взять $[\inf X; \sup X]$). Обозначим через M наибольшее из чисел $|a|, |b|$, где $[a; b]$ — отрезок, содержащий X . Тогда $-M \leq -|a| \leq a, b \leq |b| \leq M$, и потому $[a; b] \subset [-M; M]$, а значит, $X \subset [-M; M]$. Следовательно, для любого $x \in X$ выполняется неравенство $|x| \leq M$. Это позволяет заменить определение 14.2 равносильным ему определением:

Определение 14'.2. Числовое множество X *ограничено*, если существует такое число $M > 0$, что $|x| \leq M$ для всех $x \in X$:

$$(\exists M > 0) (\forall x \in X) |x| \leq M.$$

Пример 11. Множество X площадей многоугольников, лежащих внутри окружности радиуса R , ограничено снизу числом 0, а сверху числом $4R^2$ (площадью описанного квадрата). Значит, это множество ограничено. Его точной верхней гранью является число πR^2 — площадь круга.

Вопросы для самопроверки

1. Что означает неравенство $x < y$, где x, y — действительные числа?
2. Что значит, что одно числовое множество расположено левее другого? Приведите примеры.
3. Что такое разделяющее число? Приведите пример, когда число, разделяющее два множества, единственно, и пример, когда таких чисел бесконечно много.
4. Множество X состоит из иррациональных чисел луча $]-\infty; 4]$, а Y — из рациональных чисел отрезка $[6; 8]$. Лежит ли Y справа от X ? Какие числа разделяют X и Y ? Какое наименьшее число разделяет X и Y ?
5. Множество X состоит из рациональных чисел отрезка $[-2; 3]$, а Y — из иррациональных чисел отрезка $[2; 6]$. Лежит ли Y справа от X ? Есть ли числа, разделяющие множества X и Y ?
6. Для каких числовых множеств существует разделяющее их число?
7. Запишите с помощью кванторов утверждение, что множество Y лежит справа от множества X . Запишите отрицание этого утверждения.
8. Запишите с помощью кванторов утверждение, что число c разделяет множества X и Y . Запишите отрицание этого утверждения.
9. Пусть X лежит слева от Y . Могут ли X и Y иметь непустое пересечение? Могут ли X и Y иметь два общих числа? Могут ли множества X и Y пересекаться, если они разделяются двумя различными числами?
10. Сформулируйте критерий единственности разделяющего числа.
11. Приведите примеры рациональных чисел; иррациональных чисел.
12. Каким множеством является объединение множеств рациональных и иррациональных чисел? а пересечение этих множеств?
13. Что происходит с приближениями по недостатку при увеличении числа оставленных десятичных знаков? а с приближениями по избытку?
14. Какие вы знаете виды промежутков на координатной прямой? Что такое отрезок, интервал, полуинтервал, открытый луч, луч? Приведите примеры.
15. Что называют окрестностью точки, центром окрестности, радиусом окрестности? Что такое проколотая окрестность?
16. Что называется модулем действительного числа? Может ли модуль быть отрицательным? а нулем?
17. Каков геометрический смысл записи $|x|$? $|x - a|$?
18. Изобразите на координатной прямой множество $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \delta\}$, где $\delta > 0$. Что это за множество?
19. Изобразите на координатной прямой множество $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - a| < \delta\}$. Что это за множество?
20. Что такое бесконечно удаленная точка и как определяется ее окрестность?
21. Запишите с помощью кванторов определения следующих понятий: а) множества, ограниченного снизу, ограниченного сверху; б) множества, неограниченного сверху, неограниченного снизу.
22. Может ли числовое множество быть ограниченным сверху, но неограниченным снизу? Называется ли оно в этом случае ограниченным?
23. Является ли ограниченным множество \mathbb{R} действительных чисел? Ограничен ли сверху луч $[0; +\infty[$? а открытый луч $]-\infty; 7[$? Ограничен ли числовой отрезок $[1; 10]$? а интервал $]1; 5[$?
24. Чем выделяется точная верхняя грань множества X среди остальных верхних граней этого множества?
25. При каком условии существует точная верхняя грань множества X ?
26. Имеет ли пустое множество точные верхнюю и нижнюю грани? Имеет ли точную верхнюю грань множество натуральных чисел?

27. Каковы точные грани множества однозначных натуральных чисел?
 28. Для каких числовых множеств $\inf X = \sup X$?
 29. Может ли выполняться неравенство $\sup X < \inf X$?
 30. Найдите $\inf X$ и $\sup X$, если: а) $X = [\alpha; \beta]$; б) $X =]\alpha; \beta[$; в) $X =]\alpha; b]$; г) $X = [a; b[$. В каких из этих случаев $\sup X \in X$, $\inf X \in X$?

Упражнения

11. Пусть числа c_1 и c_2 разделяют множества X и Y . Докажите, что $\frac{c_1 + c_2}{2}$ также является разделяющим числом для X и Y .

12. а) Докажите, что множества

$$X = \left\{ x \mid x = \frac{2n}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\} \text{ и } Y = \left\{ x \mid x = \frac{2n+4}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

разделяются только одним числом 2.

б) Докажите, что любое число отрезка $[2; 4]$ разделяет множества

$$X = \left\{ x \mid x = \frac{2n+1}{n+5}, n \in \mathbb{N} \right\} \text{ и } Y = \left\{ x \mid x = \frac{4n^2+1}{n^2}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

13. Десятичное приближение по недостатку с точностью до 0,001 числа x равно 2,564. Чему равно его десятичное приближение с точностью до 0,001 по избытку? а с точностью до 0,1? Чему равны десятичные приближения числа x по недостатку и по избытку с точностью до 0,01?

14. Выпишите десятичные приближения числа $\sqrt{2}$ по недостатку и по избытку с точностью до 0,1, до 0,01, до 0,001 и найдите разности между числом 2 и квадратами этих приближений.

15. Известно, что $\sqrt{2} = 1,4142\dots$, $\sqrt{3} = 1,7320\dots$.

а) Найдите целую часть суммы $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ и ее первые три десятичных знака после запятой.

б) Найдите с точностью до 0,001 значение $\sqrt{6}$.

16. а) Укажите два иррациональных числа, сумма которых рациональна.

б) Укажите два иррациональных числа, произведение которых рационально.

17. а) Может ли сумма рационального и иррационального чисел быть рациональным числом?

б) Может ли произведение рационального и иррационального чисел быть рациональным числом?

18. Пусть α и β — иррациональные числа, такие, что $\alpha - \beta$ рационально. Докажите, что числа $\alpha + \beta$ и $\alpha + 3\beta$ иррациональны.

19. Пусть α и β — иррациональные числа, $r \neq 0$ — рациональное число. Какие из следующих чисел могут оказаться рациональными:

а) $\alpha + \beta$; б) $\alpha + r$; в) $\sqrt{\alpha}$; г) \sqrt{r} ; д) $\alpha \cdot \beta$; е) $\alpha \cdot r$; ж) $\sqrt{\alpha + r}$; з) $\sqrt{\alpha + \sqrt{\beta}}$; и) $\sqrt{\alpha + \sqrt{r}}$

20. Множество A — отрезок $[1; 5]$, множество B — отрезок $[3; 7]$, множество C — отрезок $[-4; 8]$, множество D — интервал $]0; 6[$. Найдите множества:

а) $A \cap B \cap C \cap D$; б) $A \cup B \cup C \cup D$;
 в) $(A \cap B) \cup (C \cap D)$; г) $(A \cup B) \cap (C \cup D)$.

21. Укажите на координатной прямой множества, определяемые неравенствами:

а) $|x - 2| < 3$; б) $|x + 2| \geq 2$;
 в) $|x - 4| + |x + 4| \leq 10$; г) $|x| > 10$.

22. а) Найдите непересекающиеся окрестности точек $x_1 = 0,99$ и $x_2 = 1,01$.
 б) Докажите, что любая точка имеет окрестность, не пересекающуюся хотя бы с одной окрестностью бесконечно удаленной точки.
 в) Докажите, что если $b \in U(a, \delta)$, то существует окрестность $U(b, \varepsilon)$, такая, что $U(b, \varepsilon) \subset U(a, \delta)$.

23. При каком условии выполняются равенства:

- а) $|x + y| = |x| + |y|$; б) $|x + y| = |x| - |y|$;
 в) $|x - y| = |x| - |y|$; г) $|x - y| = |x| + |y|$;
 д) $|x - y| = |y| - |x|$.

24. Укажите, какие из нижеследующих множеств являются ограниченными сверху, ограниченными снизу, ограниченными:

- а) множество рациональных чисел $r = \frac{p}{q}$, для которых $0 < p < q$;
 б) множество рациональных чисел $r = \frac{p}{q}$, для которых $0 < q < p$;
 в) множество рациональных чисел $r = \frac{p}{q}$, для которых $-q < p < 0$;
 г) множество иррациональных чисел, лежащих в интервале $] -1; 1[$;
 д) множество объемов правильных многогранников, вписанных в шар радиуса R ;
 е) множество десятичных приближений по недостатку действительного числа $\sqrt{5}$;

ж) множество чисел вида $\frac{n^4}{2n^4 + 1}$, где $n \in \mathbb{N}$;

з) множество чисел вида $\frac{n^2}{n + 1}$, где $n \in \mathbb{N}$.

25. Докажите, что любое конечное множество действительных чисел ограничено.

26. Докажите, что если числовые множества A и B ограничены, то их пересечение и объединение — ограниченные множества. С помощью этого утверждения докажите, что объединение любого конечного числа отрезков — ограниченное множество.

27. Пусть $X = \left\{ x \mid x = \frac{2n^2}{3n^2 + 1}, n \in \mathbb{N} \right\}$. Докажите, что $\sup X = \frac{2}{3}$, $\inf X = \frac{1}{2}$.

28. Найдите точные верхние и точные нижние грани (либо докажите, что они не существуют) для множеств, о которых идет речь в упражнении 24.

29. Докажите, что если X — ограниченное множество и $b_1 = \inf X$, $b_2 = \sup X$, то все множество X лежит в $[b_1; b_2]$, причем $[b_1; b_2]$ — наименьший из отрезков, обладающих этим свойством (т. е. что никакой отрезок $[b'_1; b'_2] \subset [b_1; b_2]$ и отличный от $[b_1; b_2]$ этим свойством не обладает).

§ 3. ФУНКЦИИ И ВЫРАЖЕНИЯ

13. Определение числовой функции. Результаты измерения физических и геометрических величин выражаются положительными числами, а изменения этих величин — произвольными действительными числами. Поэтому физические и геометрические закономерности выражаются как зависимости между числами. Среди этих зависимостей наиболее важны для практики те, в которых по заданному значению одной величины можно однозначно определить значение другой. Например, зная длину стороны квадрата x , находим его площадь по формуле $S = x^2$, а зная промежуток времени t , протекший с начала падения камня в пустоте, по формуле $s = \frac{gt^2}{2}$ находим пройденный им путь.

Закономерности, при которых значение одной величины однозначно определяет значение другой величины, описывают с помощью числовых функций, т. е. отображений из R в R (иначе говоря, отображений числовых множеств в R). Итак, введем следующее определение:

О п р е д е л е н и е 1.3. Пусть X — числовое множество. Отображение $f: X \rightarrow R$, сопоставляющее каждому числу $x \in X$ (аргументу) число $y \in R$, называют *числовой функцией*, заданной на X .

Если $f: X \rightarrow R$ — числовая функция и $a \in X$, то образ a обозначают $f(a)$ и называют *значением функции* f в точке a .

В приложениях часто записывают функции в виде $y = f(x)$. Эта запись не является математически безупречной, поскольку функция — это отображение, и потому достаточно указать само отображение f , а обозначения переменных x и y могут быть произвольными (иными словами, записи $y = f(x)$, $y = f(t)$, $t = f(x)$ и т. д. обозначают одну и ту же функцию). Тем не менее эта запись весьма удобна, особенно когда приходится иметь дело с несколькими зависимостями, связывающими различные величины. В этом случае записи $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$, $x = F(t)$ наглядно показывают, что y и z зависят от x , а x зависит от t .

Как и для любых отображений, для числовой функции можно ввести такие понятия, как: множество значений, обратимость, композиция и т. д. *Множеством значений числовой функции* f , заданной на X , называют числовое множество $f(X)$, где

$$f(X) = \{y | y = f(x) | x \in X\}.$$

Пример 1. Пусть функция f ставит в соответствие каждому числу x его квадрат x^2 (пишут $f: x \rightarrow x^2$). Тогда множеством ее значений будет множество R_0 неотрицательных чисел.

Из данного выше определения вытекает, что для задания числовой функции f надо указать числовое множество X и закон, по которому каждому числу $x \in X$ сопоставляется число $f(x)$.

Если функция f задана на множестве X и $X_1 \subset X$, то, ставя в соответствие каждому числу $x \in X_1$ число $f(x)$, получаем новую функцию, определенную лишь на множестве X_1 . Ее называют *сужением функции* f на X_1 . Обычно сужение функции f на некоторое множество обозначают той же буквой f , указывая лишь особо область ее задания.

Пример 2. Функция $f: x \rightarrow x^2$ задана на всем множестве R . Найдем множество значений ее сужения на отрезок $[-2; 5]$.

Решение. При изменении x от -2 до 0 значения x^2 меняются от 4 до 0 , а при изменении x от 0 до 5 значения x^2 меняются от 0 до 25 . Поэтому множеством значений функции $f: x \rightarrow x^2, x \in [-2; 5]$ является отрезок $[0; 25]$.

Функция $f: x \rightarrow a, x \in X$, ставящая в соответствие каждому $x \in X$ одно и то же число a , называется *постоянной на X* .

Функцию $E_X: x \rightarrow x, x \in X$, ставящую в соответствие каждому числу x из множества X это же самое число, называют *тождественной функцией* на X . Каждому подмножеству X множества R соответствует заданная на нем тождественная функция. Все эти функции являются сужениями тождественной функции, заданной на всем множестве R действительных чисел.

14. Рациональные функции. Наличие в множестве R арифметических операций, а также отношений порядка позволяет определить соответствующие понятия для числовых функций. Начнем с того, что определим арифметические операции над функциями.

Определение 2.3. Пусть функции f и g определены на множестве $X \subset R$. Их *суммой* $f + g$ называют функцию, значение которой для каждого $x \in X$ равно сумме значений функций f и g для этого значения x :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Произведением функций f и g называют такую функцию fg на X , что

$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Если функция g задана на множестве X и не обращается на нем в нуль, то через $\frac{1}{g}$ обозначают такую функцию на X , что

$$\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{g(x)}.$$

Функцию $f \cdot \frac{1}{g}$ называют *частным функций f и g* и обозначают $\frac{f}{g}$.

Таким образом,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Понятия суммы, разности, произведения и частного функций применяют и в случае, когда данные функции имеют различную область задания. В этом случае их рассматривают на пересечении областей задания.

Пример 3. Пусть функция f ставит в соответствие каждому числу x из отрезка $[-4; 7]$ число $x^2 + 1$, а функция g ставит в соответствие каждому числу x из отрезка $[-2; 10]$ число x^3 . Найдем сумму этих функций.

Решение. Имеем $[-4; 7] \cap [-2; 10] = [-2; 7]$. Функция $f + g$ ставит в соответствие каждому числу $x \in [-2; 7]$ число $x^2 + 1 + x^3$.

Определение 3.3. Целыми рациональными выражениями от x называют: а) числа; б) x ; в) выражения вида $(A(x)) + (B(x))$ и $(A(x)) \cdot (B(x))$, где $A(x)$ и $B(x)$ — целые рациональные выражения от x .

Читатель знаком с упрощениями записи целых рациональных выражений, связанными с использованием обозначения степени и опущением некоторых скобок.

Определение 4.3. Целой рациональной функцией называют функцию вида $x \rightarrow A(x)$, где $A(x)$ — целое рациональное выражение.

Например, $x \rightarrow x^2 + 6x + 1$ — целая рациональная функция.

Два различных целых рациональных выражения могут задавать одну и ту же функцию. Это будет в случае, когда при всех значениях x эти выражения имеют одинаковые значения, $\forall x A(x) = B(x)$. Выражения, задающие одну и ту же функцию, назовем *тождественно равными*. Например, тождественно равны выражения $(x^2 + 3)^2$ и $x^4 + 6x^2 + 9$, поскольку для любого x выполняется равенство $(x^2 + 3)^2 = x^4 + 6x^2 + 9$. В дальнейшем мы будем без особого определения использовать понятие тождественного равенства для выражений более общего вида.

Для простоты записи будем обозначать функцию, заданную некоторым целым рациональным выражением, с помощью того же самого выражения. Например, функция $x^2 + 9$ ставит в соответствие каждому $x \in \mathbb{R}$ число $x^2 + 9$. Как отмечалось выше, эту же функцию записывают и так: $y = x^2 + 9$. Запись

$$x^2 + 9, x \in [-1; 4] \text{ (или } y = x^2 + 9, x \in [-1; 4])$$

означает, что функция задается выражением $x^2 + 9$ лишь на отрезке $[-1; 4]$.

Определение 5.3. Рациональными выражениями от x называют: а) числа; б) x ; в) выражения вида $(A(x)) + (B(x))$, $(A(x)) \times (B(x))$, $\frac{A(x)}{B(x)}$, где $A(x)$ и $B(x)$ — рациональные выражения от x .

Например, $\frac{3}{4}x^5 - 1$, $(x^2 + 1)(x^3 - 6)$, $\frac{2x^4 - 1}{3x^7 + 8}$ — рациональные выражения, причем первые два из них — целые рациональные выражения.

Определение 6.3. Рациональной функцией называют функцию, заданную рациональным выражением.

Невозможность деления на нуль приводит к тому, что рациональные функции могут быть определены не на всяком множестве X . Наибольшее множество, на котором может быть определена такая функция, называют *областью существования* задающего ее выражения.

Пример 4. Найдем область существования рационального выражения:

$$а) \frac{1}{3x+6} + \frac{1}{7x-56}; \quad б) \frac{1}{(x+1)^2 - x^2 - 2x - 1}. \quad (1)$$

Решение. а) Это выражение имеет числовое значение, если $3x+6 \neq 0$, $7x-56 \neq 0$ и $x^2-3x+2 \neq 0$. Иными словами, для отсказания области существования выражения (1) надо исключить из R корни уравнений $3x+6=0$, $7x-56=0$, $x^2-3x+2=0$. Решая эти уравнения, получаем корни: $-2, 8, 1, 2$.

Областью существования данного выражения является множество $]-\infty; -2[\cup]-2; 1[\cup]1; 2[\cup]2; 8[\cup]8; +\infty[$.

б) Так как $(x+1)^2 - x^2 - 2x - 1 = 0$ для всех x , то область существования пуста.

Отметим, что область существования выражения не обязательно должна совпадать с областью задания соответствующей функции. Например, формула $S = \pi r^2$ задает площадь круга как функцию от его радиуса. Функция $r \rightarrow \pi r^2$ определена лишь при $r > 0$ (так как радиус всегда положителен), тогда как выражение πr^2 имеет смысл при всех значениях r .

В некоторых случаях функция задается на различных числовых множествах разными выражениями, например $x \rightarrow f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x < 0, \\ x^2 + 1, & \text{если } x \geq 0, \end{cases}$$

или $x \rightarrow D(x)$, где

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число} \end{cases}$$

(функция Дирихле).

Такой способ задания функции встречается и в приложениях. Например, если балка длиной l лежит на опорах, а в середине к ней приложена сосредоточенная нагрузка, то прогиб y балки в точке с абсциссой x (рис. 15) выражается формулой

$$y = \begin{cases} k(3l^2x - 4x^3), & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ k(3l^2(l-x) - 4(l-x)^3), & \text{если } \frac{l}{2} < x < l, \end{cases} \quad (2)$$

где k — коэффициент пропорциональности. Отметим, что целые рациональные выражения в (2) имеют смысл для всех значений x , однако физический смысл имеют лишь значения x , которые находятся в пределах ограничений, указанных в (2).

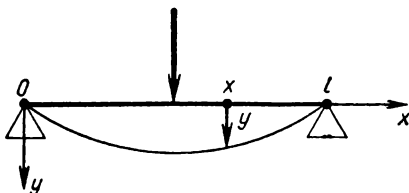


Рис. 15

15. Иррациональные функции. В п. 56 будет доказано, что для любого неотрицательного числа a и любого натурального числа $n \geq 2$ существует такое неотрицательное число x , что $x^n = a$. Это число называется *корнем n -й степени из a* и обозначается $\sqrt[n]{a}$. В случае, когда a — отрицательное число и n — нечетное число, через $\sqrt[n]{a}$ обозначают число $-\sqrt[n]{|a|}$. Это число также обладает свойством, что $x^n = a$. Например, $\sqrt[4]{16} = 2$, $\sqrt[3]{-125} = -5$.

Определение 7.3. Пусть f — функция, заданная на множестве X , и $n \geq 2$ — натуральное число. Через $\sqrt[n]{f}$ обозначается такая функция, что $\sqrt[n]{f}(x) = \sqrt[n]{f(x)}$. Эта функция при нечетных n определена для всех $x \in X$, а для четных n — лишь для таких x , что $f(x) \geq 0$.

Определение 8.3. Назовем *иррациональным выражением* от x любое выражение, полученное из чисел и x с помощью арифметических операций и извлечений корней и не являющееся рациональным выражением. Функцию, заданную иррациональным выражением, назовем *иррациональной функцией*.

Например, функции $\sqrt[3]{x^3 + 1}$, $\sqrt{x + \sqrt[4]{x - 1}}$ иррациональны. Множество, состоящее из всех чисел, для которых имеет значение иррациональное выражение, называют *областью существования* этого выражения.

Пример 5. Найдём область существования выражения $\frac{1}{\sqrt{16 - x^2}}$.

Решение. Так как корни четной степени можно извлекать лишь из неотрицательных чисел, а делить можно лишь на числа, отличные от нуля, то область существования определяется неравенством $16 - x^2 > 0$. Запишем его в виде $x^2 < 16$. Отсюда следует, что $\sqrt{x^2} < \sqrt{16}$, т. е. $|x| < 4$. Значит, $-4 < x < 4$. Итак, искомой областью существования является интервал $] -4; 4[$.

Выше мы отмечали, что область существования выражения не обязательно совпадает с областью задания соответствующей функции.

Например, площадь прямоугольника, изображенного на рисунке 16, равна $x\sqrt{4R^2 - x^2}$. Имеем функцию $x\sqrt{4R^2 - x^2}$, где $0 < x < 2R$ (иногда рассматривают эту функцию на $[0; 2R]$, добавляя «вырожденные» прямоугольники с нулевой стороной). Выражение же $x\sqrt{4R^2 - x^2}$ определено на большем отрезке $[-2R; 2R]$.

16. Тригонометрические функции. Тригонометрические (или круговые) функции имеют важные приложения в самых различных областях физики и техники. Мы дадим

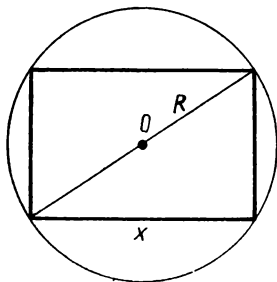


Рис. 16

этим функциям определение, основанное на геометрических понятиях (окружность, длина дуги и т. д.). Разумеется, такой подход нарушает «чистоту метода», однако на данном этапе изучения математического анализа чисто аналитическая трактовка тригонометрических функций была бы затруднительной и привела бы к слишком сложным построениям. Аналитические определения тригонометрических функций будут получены в дальнейших разделах курса.

Определим сначала понятие *длины дуги окружности*. Выберем на дуге $\Gamma = \cup AB$ точки $A = M_0, M_1, \dots, M_n = B$ (рис. 17) и проведем хорды $M_0M_1, \dots, M_{n-1}M_n$. Получим ломаную $M_0M_1 \dots M_{n-1}M_n$, *вписанную в дугу* AB . Отрезки касательных к окружности, проведенные в точках $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}, M_n$, образуют ломаную $M_0N_1 \dots N_nM_n$, *описанную вокруг той же дуги*. Так как $|M_0M_1| \leq |M_0N_1| + |N_1M_1|$ и т. д., то длина описанной ломаной больше длины вписанной ломаной, соответствующей тому же разбиению дуги Γ .

Если к точкам деления M_0, M_1, \dots, M_n добавить новую точку C , лежащую, например, на дуге M_kM_{k+1} , то длина вписанной ломаной увеличится, а длина описанной ломаной уменьшится. Это следует из того, что (рис. 18)

$$\begin{aligned} |M_kM_{k+1}| &\leq |M_kC| + |CM_{k+1}| \text{ и} \\ |ST| &\leq |SN_{k+1}| + |N_{k+1}T|. \end{aligned}$$

Аналогичное утверждение справедливо, разумеется, при добавлении любого числа новых точек деления.

Покажем, что *длина $l_{\text{вп}}$ любой ломаной, вписанной в дугу Γ , меньше длины $l_{\text{оп}}$ любой ломаной, описанной вокруг той же дуги*. Пусть вписанная ломаная соответствует точкам деления $A = M_0, M_1, \dots, M_n = B$, а описанная ломаная — точкам деления $A = P_0, P_1, \dots, P_m = B$. Образует новое множество точек деления, объединив множества $\{M_0, M_1, \dots, M_n\}$ и $\{P_0, P_1, \dots, P_m\}$. Длины ломаных, соответствующих этому объединенному множеству точек, обозначим $l'_{\text{вп}}$ и $l'_{\text{оп}}$. Имеют место неравенства $l_{\text{вп}} \leq l'_{\text{вп}} \leq l'_{\text{оп}} \leq l_{\text{оп}}$, из которых и следует, что $l_{\text{вп}} \leq l_{\text{оп}}$.

Итак, множества $X = \{l_{\text{вп}}\}$ и $Y = \{l_{\text{оп}}\}$ таковы, что X лежит слева от Y . Поэтому имеется хотя бы одно число, разделяющее эти множества. Можно показать, что это число определено однозначно. Для этого нужно доказать, что при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение дуги AB , для которого $l_{\text{оп}} - l_{\text{вп}} < \varepsilon$ (см. с. 16).

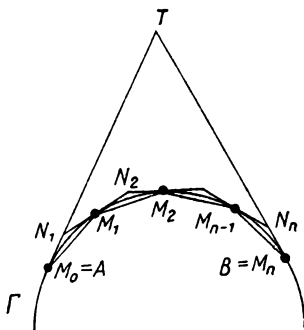


Рис. 17

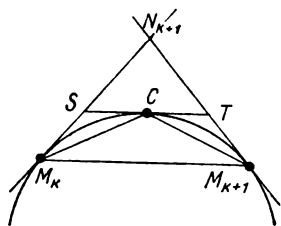


Рис. 18

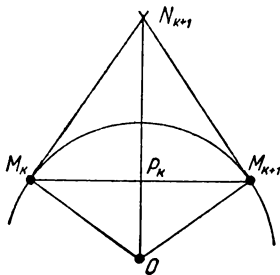


Рис. 19

В самом деле, разделим дугу $\Gamma = \cup AB$ на $n = 2^k$ равных частей (это возможно, так как любую дугу можно разделить пополам). Как видно из рисунка 19, $|M_k N_{k+1}| - |M_k P_k| \leq |N_{k+1} P_k|$, и потому $b_n - a_n \leq 2h_n$, где a_n — длина звена вписанной ломаной, b_n — длина звена описанной ломаной и h_n — длина «стрелки». Но тогда имеем:

$$l_{\text{оп}} - l_{\text{вп}} = nb_n - na_n \leq 2nh_n.$$

Заметим, что треугольники $OM_k N_{k+1}$ и $M_k P_k N_{k+1}$ подобны, и потому $\frac{h_n}{a_n} = \frac{b_n}{R}$. Значит,

$$2nh_n = \frac{2na_nb_n}{R} = \frac{2a_n \cdot l_{\text{оп}}}{R}.$$

Но $l_{\text{оп}} \leq |AT| + |TB|$ (см. рис. 17), и, следовательно, $2nh_n < 2ca_n$, где $c = \frac{|AT| + |TB|}{R}$. Деля дугу Γ на достаточно большое число частей, получаем, что $a_n < \frac{\varepsilon}{2c}$, и потому $l_{\text{оп}} - l_{\text{вп}} \leq 2nh_n \leq 2ca_n < \varepsilon$.

Итак, существует единственное число, разделяющее множества $\{l_{\text{вп}}\}$ и $\{l_{\text{оп}}\}$. Это число называют *длиной дуги* Γ и обозначают l_Γ .

Отметим следующие свойства длины дуги окружности:

а) *Равные дуги окружности имеют равные длины*, т. е.

$$\cup \Gamma_1 = \cup \Gamma_2 \Rightarrow l_{\Gamma_1} = l_{\Gamma_2}.$$

б) *Если точка C разбивает дугу окружности Γ на части Γ_1 и Γ_2 , то $l_\Gamma = l_{\Gamma_1} + l_{\Gamma_2}$.*

в) *При преобразовании подобия дуга окружности Γ переходит в дугу окружности Γ_1 , причем отношение длин этих дуг равно коэффициенту подобия (и тем самым отношению радиусов окружностей).*

Обозначим отношение длины окружности к длине ее диаметра через π . Тогда длина окружности радиуса R равна $2\pi R$. Имеет место следующее утверждение:

Теорема 1.3. Пусть T — окружность радиуса 1 и A — точка на T . Если $0 \leq t \leq 2\pi$, то существует единственная точка M на окружности T , такая, что длина дуги AM , направленной против часовой стрелки, равна t , и единственная точка N на T , такая, что длина дуги AN , направленной по часовой стрелке, равна t (точки M и N симметричны относительно прямой OA , рис. 20)¹.

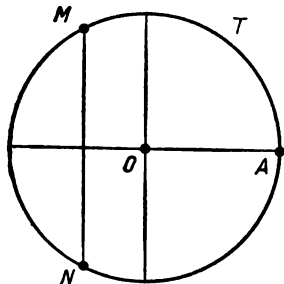


Рис. 20

Определим отображение $f: R \rightarrow T$ числовой прямой на окружность единичного радиуса следующим образом. Выберем на окружности точку A (начало отсчета) и каждому числу $t \in [0; 2\pi[$ поставим в соответствие такую точку $M(t)$ окружности, что длина дуги AM , пробегаемой против часовой стрелки, равна t . Далее, любому числу $t \in R$, такому, что $2\pi m \leq t < 2\pi(m+1)$,

¹ Мы опускаем доказательство этого наглядно очевидного утверждения, так как оно потребовало бы привлечения понятия непрерывности дуги, которым мы пока что не располагаем.

$m \in \mathbb{Z}$, поставим в соответствие точку $M(t - 2\pi m)$.

Построенное отображение не является взаимно однозначным, поскольку по определению при $t - s = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, имеем $M(t) = M(s)$. Но оно является отображением \mathbb{R} на \mathbb{T} — каждая точка M окружности соответствует множеству действительных чисел, отличающихся друг от друга на целое кратное 2π .

Выберем систему декартовых координат, приняв за ее начало центр окружности, за положительное направление оси абсцисс — луч OA , а за положительное направление оси ординат — луч OB , где $B = B\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Тогда каждому числу t соответствуют два числа: абсцисса и ордината точки $M(t)$. Абсциссу точки $M(t)$ называют *косинусом числа t* , а ординату этой точки — *синусом числа t* :

$$x = \cos t, y = \sin t.$$

Отношение $\frac{\sin t}{\cos t}$ называют *тангенсом числа t* , а отношение $\frac{\cos t}{\sin t}$ — *котангенсом* того же числа.

Функции $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$ называют *тригонометрическими* или *круговыми*. Их свойства известны читателю из курса математики средней школы.

17. Композиция числовых функций. Введем понятие композиции числовых функций.

О п р е д е л е н и е 9.3. Пусть числовая функция f задана на множестве X , а функция g — на множестве Y , и пусть $f(X) \subset Y$. Тогда существует отображение $g \circ f$ множества X в \mathbb{R} , задаваемое формулой

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Это отображение является числовой функцией, заданной на множестве X , которую называют *композицией функций f и g* .

Для математического анализа наиболее существенным является случай, когда функции f и g заданы своими выражениями. В этом случае выражение функции $g \circ f$ получается следующим образом: в выражении функции g каждое вхождение буквы x заменяется выражением $f(x)$.

П р и м е р 6. Найдем выражение для композиций $g \circ f$ и $f \circ g$, где $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = \sqrt{x + 3} - x$.

Р е ш е н и е. Заменяя в выражении $\sqrt{x + 3} - x$ каждое вхождение буквы x на $x^3 + 1$, получаем выражение $\sqrt{x^3 + 4} - (x^3 + 1)$ для функции $g \circ f$. Таким же образом получаем выражение $(\sqrt{x + 3} - x)^3 + 1$ для функции $f \circ g$.

Может случиться, что множество значений выражения, задающего функцию f , не является подмножеством области определения Y функции g . Тогда выражение, полученное подстановкой выражения для f в выражение для g , определяет функцию $g \circ f$ лишь для x , при которых $f(x) \in Y$.

Пример. 7 Найдем область определения функции $g \circ f$, если $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = 4 - x^2$.

Решение. Так как \sqrt{x} имеет значение лишь при $x \geq 0$, то искомая область определения задается неравенством $4 - x^2 \geq 0$. Из него находим, что $x \in [-2; 2]$.

18. Таблицы значений функции. Функциональные шкалы. Пусть $f: X \rightarrow R$ — некоторая функция. Выберем значения x_1, x_2, \dots, x_n из X и составим таблицу:

x_1	x_2	x_3	\dots	x_n
$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	\dots	$f(x_n)$

Эта таблица позволяет находить значения функции для выбранных значений аргумента. Обычно значения x_1, x_2, \dots, x_n выбирают в порядке возрастания на равных расстояниях друг от друга:

$$x_1, x_1 + h, x_1 + 2h, \dots, x_1 + (n - 1)h.$$

Число h называют *шагом таблицы*. Примерами таблиц функций являются применяемые в школе таблицы квадратов, кубов, корней, логарифмов, тригонометрических функций. Чем меньше шаг таблицы, тем больше значений функции содержит таблица, тем она точнее.

Таблица значений функции x^2 для значений x от 1 до 2 с шагом $h = 0,1$ имеет вид:

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
x^2	1	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	2,89	3,24	3,61	4

Следует иметь в виду, что таблица не задает функции, поскольку для задания функции надо знать ее значения для всех x из X , а не только для некоторых. Кроме того, табличные значения функции являются, как правило, лишь приближенными. Но для практических целей таблицы функций весьма удобны.

Часто зависимость одной величины от другой находят опытным путем, придавая одной величине (например, температуре) определенные значения и устанавливая для каждого из них значение второй величины (например, давления газа). Таким образом, опыт позволяет получить лишь некоторую таблицу значений функции. Существуют методы, позволяющие по такой таблице подбирать выражение, разумеется, с определенной точностью.

Кроме таблицы значений функции, на практике используют *функциональные шкалы*. Если задана функция f , то на прямой линии откладывают от фиксированной точки значения $f(x_1)$,

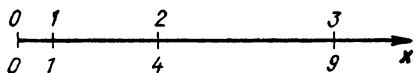


Рис. 21



Рис. 22

..., $f(x_n)$ и около полученных точек ставят отметки x_1, \dots, x_n . На рисунке 21 изображена функциональная шкала для функции x^3 . Примером функциональной шкалы является логарифмическая линейка, на ней изображена шкала для функции $\lg x$ (рис. 22).

19. График функции.

О п р е д е л е н и е 10.3. Графиком любого отображения $f: X \rightarrow Y$ называют множество Γ_f пар $(x; y)$, где $x \in X$ и $y = f(x)$:

$$\Gamma_f = \{(x; y) | x \in X \text{ и } y = f(x)\}.$$

П р и м е р 8. Пусть f отображает множество $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ в множество R , причем $f(1) = 2$, $f(2) = 6$, $f(3) = 10$, $f(4) = 17$, $f(5) = 0$. Тогда графиком отображения является множество пар

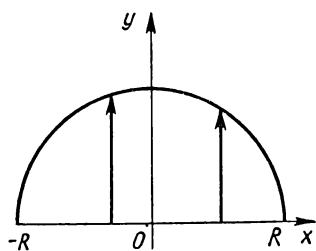
$$\Gamma_f = \{(1; 2), (2; 6), (3; 10), (4; 17), (5; 0)\}.$$

В случае числовых функций каждая пара $(x; f(x))$ состоит из двух чисел x и $f(x)$, а потому может быть изображена точкой $M(x; f(x))$ на координатной плоскости. Поэтому график числовой функции может быть наглядно изображен множеством точек координатной плоскости. Это множество также принято называть *графиком данной функции*:

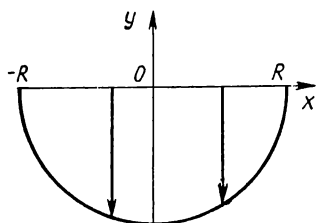
$$\Gamma_f = \{M(x; f(x)) | x \in X\}.$$

Обычно графиком функции является некоторая линия. Однако не всякое множество точек плоскости является графиком некоторой функции. Из определения функции следует, что каждому значению $x \in X$ соответствует только одно значение $f(x)$, а потому прямая, параллельная оси ординат, может пересекать график функции не более чем в одной точке. Например, окружность не является графиком какой-либо функции, так как прямые, параллельные оси ординат, могут пересекать ее в двух точках; полуокружность на рисунке 23, а является графиком функции $\sqrt{R^2 - x^2}$, полуокружность же на рисунке 23, б — графиком функции $-\sqrt{R^2 - x^2}$. На практике строят не графики функций (т. е. линии, не имеющие толщины), а эскизы таких графиков. Для этого обычно составляют таблицу значений функции

x	—3	—2	—1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0,10	0,16	0,42	2,86	2,86	0,42	0,16	0,10



а)



б)

Рис. 23

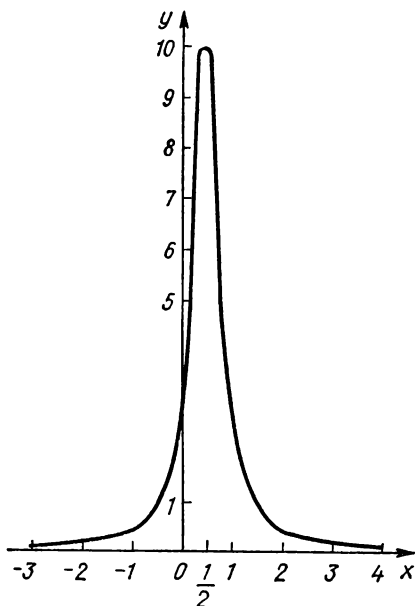


Рис. 25

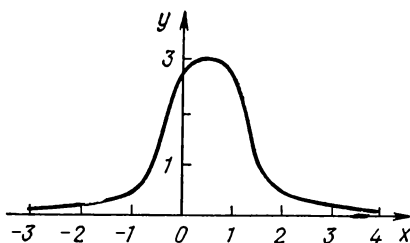


Рис. 24

для некоторых значений аргумента, наносят на плоскость соответствующие точки и соединяют полученные точки линией. При этом предполагается, что график функции является достаточно плавной линией, а найденные точки достаточно точно показывают ход изменения функции. Если эти предположения не выполняются, построенный график будет сильно отличаться от истинного. Например, для функции

$$\frac{1}{(x - 0,5)^2 + 0,1}$$
 имеем таблицу значений, указанную на с. 41.

Если нанести полученные точки на плоскость и соединить их непрерывной линией, получится график, изображенный на рисунке 24. Истинный же график функции имеет вид, изображенный на рисунке 25.

На рисунке 26 изображены графики степенной функции x^k при различных $k \in \mathbb{Z}$; на рисунке 26, а представлен случай, когда $k = 2n$ — четное натуральное число; на рисунке 26, б $k = 1$; на рисунке 26, в $k = 2n + 1$ — нечетное натуральное число; на рисунке 26, г $k = 0$; на рисунке 26, д $k = -2n$ — четное отрицательное число; на рисунке 26, е $k = -(2n - 1)$ — нечетное отрицательное число.

На рисунке 27 изображены графики тригонометрических функций.

Встречаются функции, графики которых невозможно изобразить.

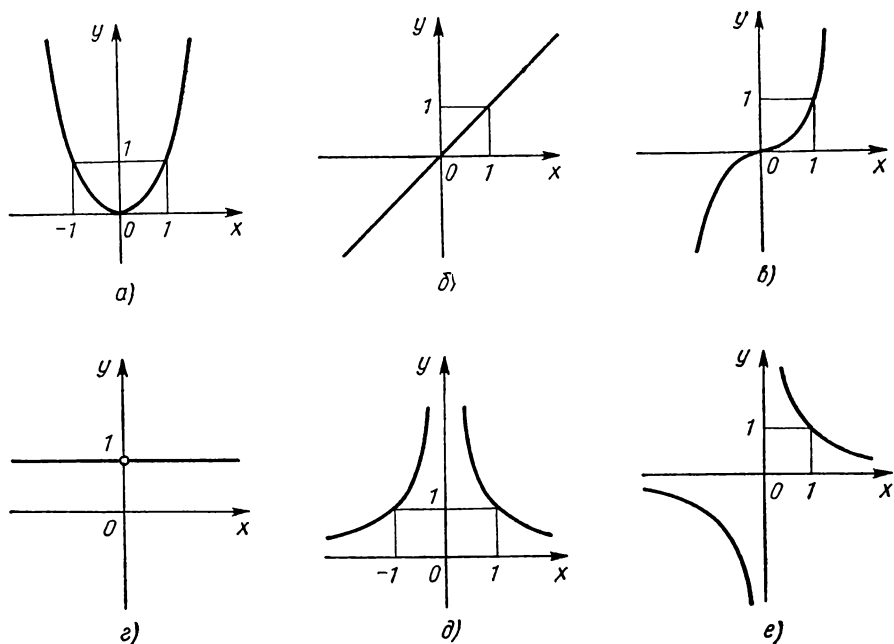


Рис. 26

Примером такой функции является функция Дирихле (с. 35). Так как на сколь угодно малом отрезке числовой прямой имеются как рациональные, так и иррациональные точки, график функции $D(x)$ не является линией. Он состоит из точек оси абсцисс с иррациональными абсциссами и точек прямой $y = 1$ с рациональными абсциссами. Построить такой график невозможно.

Если задан график функции f , то для любого значения $x \in X$ легко найти соответствующее значение функции. Для этого достаточно провести через точку $A(x; 0)$ оси абсцисс прямую, параллельную оси ординат, а потом через точку пересечения этой прямой с графиком провести прямую, параллельную оси абсцисс, до пересечения с осью ординат (рис. 28). Полученная точка оси ординат и соответствует выбранной точке оси абсцисс, т. е. указывает значение функции f в точке $x \in X$.

На практике применяются приборы, автоматически записывающие ход изменения некоторых величин с течением времени (термографы, барографы и т. д.). Они задают графики этих величин как функций времени. Следует иметь в виду, однако, что это задание является лишь приближенным, так как получающаяся линия имеет некоторую толщину, и потому значение y , соответствующее данному значению t , определяется по графику лишь приближенно. Впрочем, это не столь существенно, поскольку любые измерения физических величин выполняются с некоторой погрешностью и любая реальная физическая зависимость имеет лишь приближенный характер.

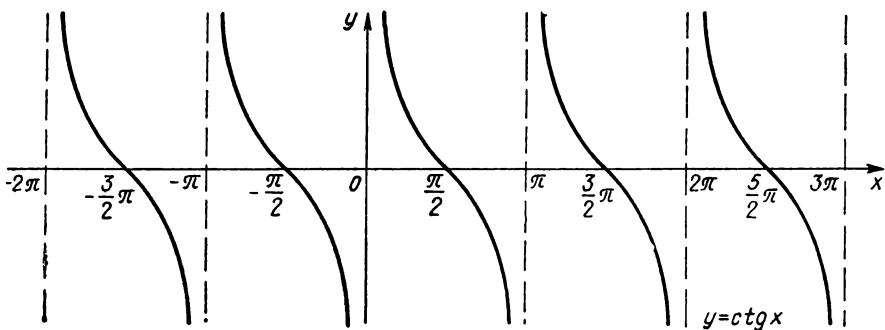
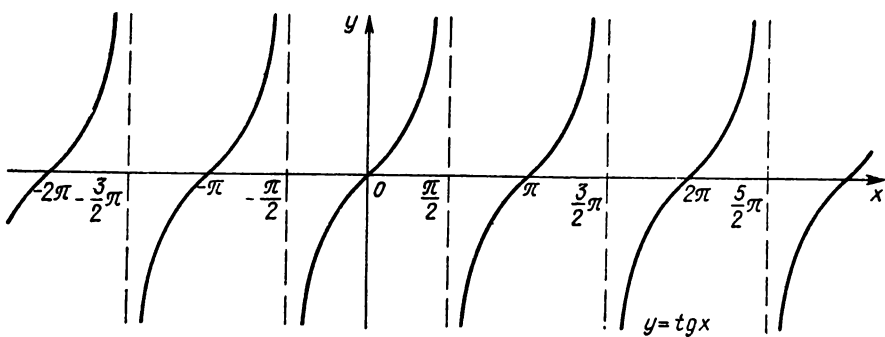
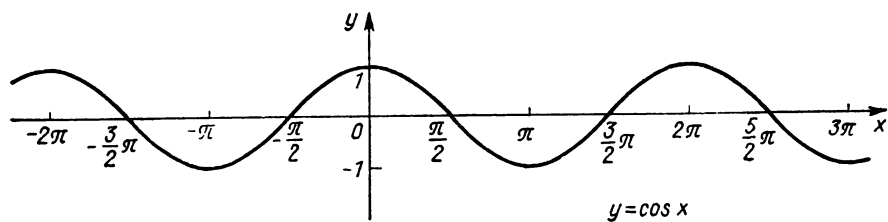
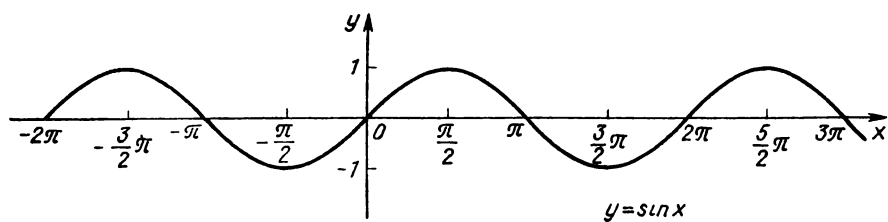


Рис. 27

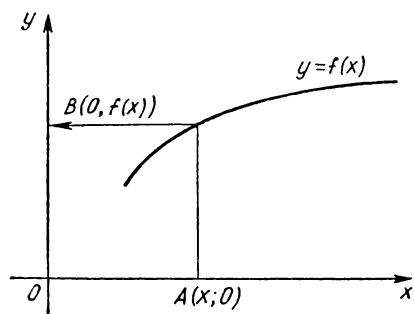


Рис. 28,

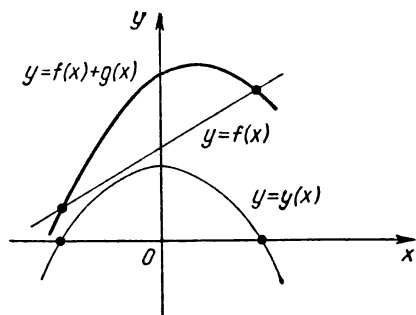
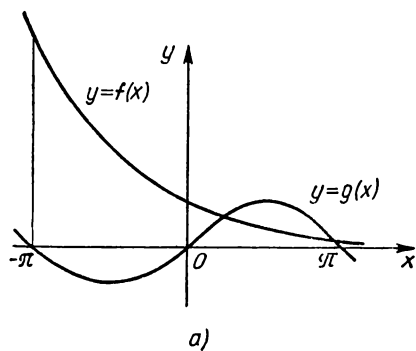
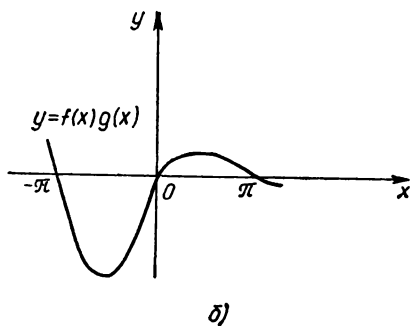


Рис. 29



a)



б)

Рис. 30

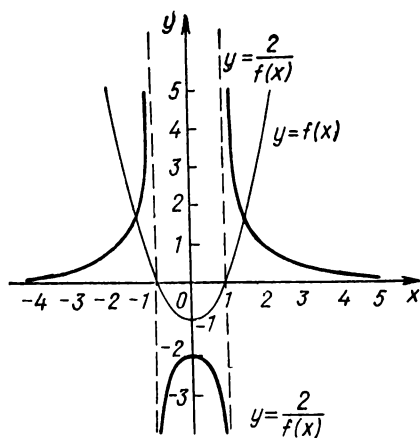


Рис. 31

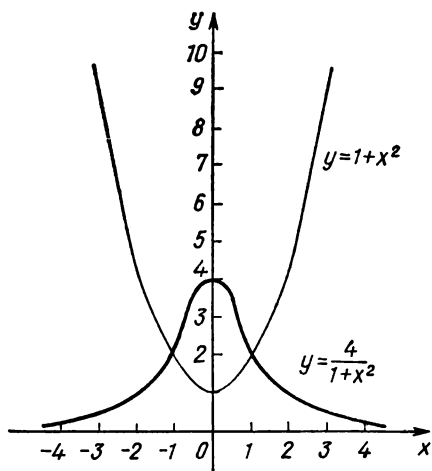


Рис. 32

20. «Сложение» и «умножение» графиков функций. Пусть известны графики заданных на X функций f и g . Чтобы построить график функции $f + g$, достаточно для каждого $x \in X$ сложить ординаты графиков этих функций (рис. 29).

Чтобы построить график функции $f \cdot g$, надо перемножить для каждого $x \in X$ ординаты графиков функций f и g . При этом $f(x) \cdot g(x)$ обращается в нуль, если хотя бы одна из функций f, g обращается в нуль в данной точке (рис. 30).

График функции $\frac{a}{f}$ строят, деля a на ординаты графика функции f . При этом в точках, где f обращается в нуль, функция $\frac{a}{f}$ не определена. Обычно около этих точек график функции $\frac{a}{f}$ неограниченно удаляется от оси абсцисс (на рис. 31 $a = 2$).

Пример 9. Построим график функции $\frac{4}{1+x^2}$.

Решение. График функции $\frac{4}{1+x^2}$ изображен на рисунке 32. Выполняя деление числа 4 на ординаты этого графика, получаем ординаты графика функции $\frac{4}{1+x^2}$. При этом ясно, что с увеличением $|x|$ значения $\frac{4}{1+x^2}$ уменьшаются и стремятся к нулю.

Вопросы для самопроверки

1. Как определяется числовая функция?
2. Что такое сужение функции на множество X_1 ?
3. Как определяются сумма, произведение и частное функций?
4. Что называется множеством значений функции?
5. В каком случае таблица задает функцию?
6. Пусть функция задана выражением. Что называется ее областью задания? Может ли область задания функции отличаться от области существования задающего ее выражения?
7. Что такое рациональная функция? иррациональная функция?
8. Как определяется композиция функций? Приведите пример композиции двух и трех функций.
9. Что называется графиком функции?
10. Любое ли множество точек плоскости может быть графиком некоторой функции? Является ли эллипс графиком некоторой функции?
11. Можно ли задать таблицей отображение конечного числового множества X в R (т. е. числовую функцию, заданную на конечном множестве)?
12. Чем отличается область существования выражения $\sqrt{x^2 - 16}$ от области существования выражения $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 16}}$?

Упражнения

30. Дана функция f , где $f(x) = x^3 - E(x)$. Вычислите: а) $f(2,5)$; б) $f(\sqrt{2})$;
- в) $f(\pi)$.
31. Функция f задана так: для любого $x \in R_+$ $f(x)$ есть второй знак после запятой в записи числа x в виде бесконечной десятичной дроби. Вычислите: а) $f\left(\frac{1}{3}\right)$;
- б) $f\left(3\frac{1}{2}\right)$; в) $f(\sqrt{2})$; г) $f(\pi)$; д) $f\left(\frac{3}{7}\right)$.
32. Дана функция f , где

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ x + 1, & \text{если } 1 < x \leq 6. \end{cases}$$

Вычислите: а) $f(0)$; б) $f\left(\frac{1}{2}\right)$; в) $f(1)$; г) $f(2)$; д) $f(\pi - 1)$. Постройте график функции.

33. Дана функция f , где

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x < \pi, \\ x - \pi, & \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Вычислите: а) $f(0)$; б) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$; в) $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$. Постройте график функции. Существует ли $f(-\pi)$?

34. Дана функция f , где

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & -1 \leq x < 0, \\ \cos^2 x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ \frac{x-1}{x+1}, & \pi < x \leq 6. \end{cases}$$

Вычислите: а) $f(-1)$; б) $f(0)$; в) $f(\pi)$; г) $f(6)$; д) $f(3)$; е) $f(4)$.

35. Дана функция f , где $f(x) = |x| - 1$. Вычислите: а) $f(-2)$; б) $f(0)$; в) $f(1)$. Постройте график функции.

36. Дана функция f , где

$$f(x) = \frac{|x| + |x-1|}{|x+2|}.$$

Вычислите: а) $f(-7)$; б) $f(-3)$; в) $f(-1)$; г) $f(0)$; д) $f(1)$.

37. Дана функция f , где

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } |x| < 1 \text{ и } x \in \mathbb{Q}, \\ -x^2, & \text{если } |x| < 1 \text{ и } x \in I, \\ x^2 + 4, & \text{если } |x| \geq 1 \text{ и } x \in \mathbb{Q}, \\ -x^2 - 4, & \text{если } |x| \geq 1 \text{ и } x \in I. \end{cases}$$

Вычислите: а) $f\left(\frac{5}{6}\right)$; б) $f(-1)$; в) $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; г) $f\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$; д) $f(7,1)$; е) $f(\pi)$;

ж) $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

38. Не используя знаков модуля и радикала, запишите выражения для следующих функций:

а) $\frac{x + |x|}{2}$; б) $|2 - 3x|$; в) $|x - 1| + |x - 2|$;

г) $|x^2 - 9|$; д) $||x - 3| - 1|$.

39. Постройте эскиз графика функции по следующей таблице ее значений:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0	1	3	5	2,5	2	1,5

Найдите приближенное значение $f(1,5)$. При каких значениях x имеем $f(x) = 4$?

40. Функции f и g заданы таблицами:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	3	5	7	9
$g(x)$	-1	-5	-9	-13	-17

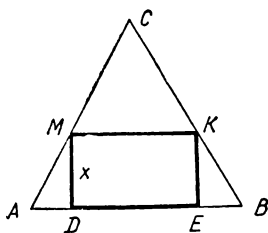


Рис. 33

Составьте таблицу значений для функций: а) $f + g$; б) $f - g$; в) $f \cdot g$; г) $\frac{f}{g}$.

41. Прямоугольник, сторона которого равна x , вписан в окружность радиуса R . а) Найдите периметр P этого прямоугольника. б) Какова область задания функции P ? в) Какова область существования выражения $P(x)$?

42. В равносторонний треугольник, сторона которого равна a , вписан прямоугольник с высотой x (рис. 33). а) Выразите площадь этого прямоугольника как функцию от x . б) Найдите область задания этой функции. в) Найдите область существования по-

лученного выражения.

43. Два пункта A и B находятся в стороне от железной дороги (рис. 34). Строится шоссе из пункта A до станции C железной дороги и от C до пункта B . Выразите длину шоссе как функцию расстояния x от C до D .

44. Геометрическая фигура состоит из прямоугольника со сторонами a и b , на сторону a поставлен равносторонний треугольник (рис. 35). Обозначим через $S(x)$ площадь фигуры, находящейся между нижним основанием прямоугольника и прямой, которая параллельна основанию и отстоит от него на расстоянии x . а) Напишите выражение для $S(x)$. б) Найдите область задания функции S и область существования выражения $S(x)$.

45. Найдите множество значений функции:

а) x^2 , $-2 \leq x \leq 4$; б) $x^3 - 6x + 1$, $-\infty < x < \infty$;

в) $2 \sin x$, $-\infty < x < +\infty$; г) $2 \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$;

д) $\sin^2 x + \cos^2 x$, $-\infty < x < +\infty$; е) $\sqrt{9 - x^2}$, $-3 \leq x \leq 3$.

Найдите область существования следующих выражений:

46. а) $2x^3 + 3x^2 - 5x$; б) $\frac{7x - 5}{x^2 - 9}$; в) $\frac{3x - 1}{2x^3 + 5x + 2}$;

г) $\frac{x + 2}{|x| - 2}$; д) $\frac{x^3 + 1}{x^3 - x}$; е) $\sqrt{9 - 4x}$;

ж) $\sqrt{x^2 - 4}$; з) $\frac{E(x)}{x + 1}$; и) $\frac{x + 1}{E(x)}$.

47. а) $\frac{x + 1}{\sin \pi x}$; б) $\frac{\sqrt{x}}{\cos \pi x}$; в) $\frac{x + 2}{2 \sin x - 1}$.

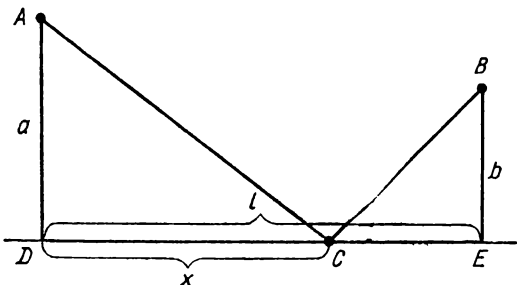


Рис. 34

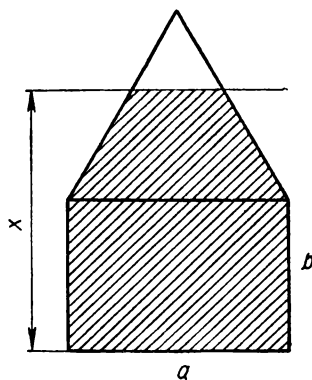


Рис. 35

$$48. \text{ а) } \frac{1}{\sqrt{|x|+x}}; \quad \text{ б) } \frac{1}{\sqrt{|x|-x}}; \quad \text{ в) } \sin \frac{x^2+1}{x^2-6x+8}.$$

$$49. \text{ а) } \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x; \quad \text{ б) } \frac{\operatorname{tg} x}{2 \sin^2 x - 1}.$$

$$50. \text{ а) } \sqrt{\frac{x-1}{x-8}}; \quad \text{ б) } \sqrt{x^2-5x+6}; \quad \text{ в) } \sqrt[4]{x^3-9x}.$$

$$51. \text{ а) } \sqrt{\frac{x-5}{x^2-10x+24}} + \sqrt[3]{x+5}; \quad \text{ б) } \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} + \sqrt{12-x-x^2}.$$

$$52. \frac{x}{1+\sqrt{x^2-4x}} + \sqrt[6]{25-x^2}.$$

$$53. \sqrt{4-|x|} + \frac{1}{x^3-4x}.$$

$$54. \frac{1}{\sqrt{8-x}-1} + \sin 3x.$$

$$55. \text{ а) } \sqrt{\sin x} + \sqrt[4]{16-x^2}; \quad \text{ б) } \sqrt{\sin x - \frac{1}{2}} + \sqrt{9x-x^2}.$$

$$56. \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x + x^3 + \sin x + \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}.$$

57. Придумайте пример функции, заданной выражением, область существования которого составляют следующие промежутки:

а) $]1; 3[$; б) $[-1; 6]$; в) $[0; 3[$; г) $[1; +\infty[$;
 д) $]0; +\infty[$; е) $] -\infty; -7[$; ж) $[1; 5[\cup]6; 8[$.

58. Тожественны ли функции f и g , где $f(x) = \sqrt{x} \sqrt{x-1}$, $g(x) = \sqrt{x(x-1)}$? На каком промежутке они тождественны?

59. Дана функция f , где $f(x) = (x-1)^4 + 4(x-1)^3 + \cos(x-1)$. Докажите, что $f(1-a) = f(1+a)$.

60. а) Дана функция f , где $f(x) = 1 + 3x^4 - \cos 2x$. Докажите, что $f(-x) = f(x)$.

б) Дана функция f , где $f(x) = \sin \frac{x}{2} - x + x^3$. Докажите, что $f(-x) = -f(x)$.

61. Известно, что $f(x) = \cos^2 x$, $g(x) = \cos x$. Докажите, что $g(2x) = 2f(x) - 1$.

62. Найдите $f(x)$, если: а) $f(1+2x) = x - x^2 + 1$; б) $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

63. Составьте композицию функций $g \circ f$, если:

а) $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^3$; б) $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$;

в) $f(x) = x^2 + 5x + 3$, $g(x) = \operatorname{tg} 2x$; г) $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $g(x) = x^2 + 5x + 6$.

64. Составьте композицию функций $h \circ g \circ f$, если:

а) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = \sqrt[3]{x}-1$;

б) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $h(x) = \operatorname{tg} x$.

65. Дана функция f , где $f(x) = \operatorname{ctg} 2x$. Найдите: а) $f^3(x) - 3f(x) + 2$;
 б) $f(x^2 - 5x + 1)$; в) $\sqrt[3]{f(x)} + \frac{1}{f(x)}$.

66. Даны функции f и g , где $f(x) = \sin x^2$, $g(x) = x^3 + 1$. Найдите: а) $f(x) + g(x)$; б) $f^2(x) \cdot g(x^2)$; в) $\sqrt{f(x)} + g(\sqrt{x})$; г) $f(g(x))$; д) $g(f(x))$; е) $f(f(x))$; ж) $g(g(x))$.

67. Даны функции f и g , где

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{при } |x| > 1, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{при } |x| \leq 2, \\ 2 & \text{при } |x| > 2. \end{cases}$$

Найдите: а) $f(g(x))$; б) $g(f(x))$; в) $f(f(x))$; г) $g(g(x))$.

68. Дана функция f , где $f(x) = \sin x$. Найдите: а) $f(f(x))$; б) $f(f^2(x - 1))$; в) $f^3(f(x) - 1)$.

Постройте графики следующих функций:

69. а) $x - 1$; б) $2x - 1$; в) $3 - 2x$; г) $5x - 3$.

70. а) x^4 ; б) x^3 ; в) $\frac{1}{x^3}$; г) $\frac{1}{x^4}$; д) $-\frac{1}{x}$; е) $\frac{3}{x^2}$; ж) $-\frac{1}{2}x^6$.

71. а) $x^2 - 4$; б) $9 - x^2$; в) $x^2 - 6x + 8$; г) $2x^2 - 3x + 1$.

72. а) $x^3 + 1$; б) $\sin x + x$; в) $x + \frac{4}{x^2}$.

73. а) $\frac{1}{x^2 - 6x + 8}$; б) $\frac{1}{\sin x}$; в) $\frac{\sin x}{1 + x^2}$.

74. а) $x \cdot \sin x$; б) $\frac{\cos x}{x}$.

75. а) $|x + 3| - 2x$; б) $|x^2 - 9| + x^2 - 9$;
в) $|\sin x| - \sin x$; г) $\cos x + |\cos x|$.

76. Постройте график функции f , если:

$$\begin{aligned} \text{а) } f(x) &= \begin{cases} x - 3, & x \leq 1, \\ x^2 + 4, & x > 1; \end{cases} & \text{б) } f(x) &= \begin{cases} x, & x < -1, \\ 1, & -1 \leq x \leq 1, \\ x, & x > 1; \end{cases} \\ \text{в) } f(x) &= \begin{cases} x, & x < -1, \\ 0, & -1 \leq x \leq 1, \\ x^2, & x > 1; \end{cases} & \text{г) } f(x) &= \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ \lg x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ \cos x, & x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

77. Решите графически уравнение:

а) $x^3 = 5 - x$; б) $4 - 3x = \lg x$, $x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right]$;

в) $x^2 = \sin x$; г) $x^3 = \cos x$;

д) $\cos x = \frac{1}{x}$, $\pi \leq x \leq 2\pi$; е) $x^3 + 2x - 15 = 0$;

ж) $x^2 = (1 - x)^3$; з) $2 \sin \frac{x}{2} = 2 - x$; и) $x - \cos \frac{x}{2} = 0$.

§ 4. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

21. Ограниченные и неограниченные функции. Перейдем к изучению свойств числовых функций, связанных с наличием в R отношения порядка. Начнем с понятий ограниченности и неограниченности функций.

О п р е д е л е н и е 1.4. Функция f , заданная на множестве X , называется *ограниченной сверху (снизу)* на этом множестве, если множество ее значений $f(X) = \{f(x) | x \in X\}$ ограничено сверху (снизу).

Вспоминая определение ограниченного сверху (снизу) множества,

получаем формулировку свойства ограниченности функции f сверху (снизу) на языке неравенств:

О п р е д е л е н и е 1'. 4. Функция f , заданная на множестве X , называется *ограниченной сверху* на этом множестве, если существует такое число M , что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leq M$:

$$(\exists M) (\forall x \in X) f(x) \leq M.$$

Аналогично определяется понятие ограниченной снизу функции. Мы дадим запись этого определения в кванторах: f ограничена снизу на X , если

$$(\exists M) (\forall x \in X) f(x) \geq M.$$

О п р е д е л е н и е 2.4. Если функция f , заданная на множестве X , ограничена и сверху, и снизу, она называется *ограниченной* на этом множестве.

С учетом сказанного на с. 28 определение 2.4 ограниченности функции может быть сформулировано следующим образом.

О п р е д е л е н и е 2'. 4. Функция f называется *ограниченной* на множестве X , если существует такое $M > 0$, что $|f(x)| \leq M$ для всех $x \in X$:

$$(\exists M > 0) (\forall x \in X) |f(x)| \leq M.$$

З а м е ч а н и е. Во многих случаях приходится исследовать ограниченность и неограниченность не самой функции f , а ее сужения на некоторое множество $X_1 \subset X$. Если сужение функции f на множество X_1 ограничено (соответственно ограничено сверху, ограничено снизу), то будем говорить, что сама функция f ограничена (соответственно ограничена сверху, ограничена снизу) на X_1 .

П р и м е р 1. Докажем, что функция $9 - x^2$ ограничена сверху на множестве R .

Р е ш е н и е. Для любого $x \in R$ выполняется неравенство $9 - x^2 \leq 9$. Оно показывает, что функция $9 - x^2$ ограничена сверху на R .

П р и м е р 2. Докажем, что функция $\frac{x^2}{1+x^2}$ ограничена на R .

Р е ш е н и е. Так как $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$, то для любого $x \in R$ выполняются неравенства

$$0 \leq \frac{x^2}{1+x^2} \leq 1.$$

Значит, функция $\frac{x^2}{1+x^2}$ ограничена на R .

При доказательстве ограниченности функций оказываются полезными следующие утверждения:

а) Если функция f ограничена на множествах X_1 и X_2 , то она ограничена и на объединении $X = X_1 \cup X_2$ этих множеств.

В самом деле, по условию существуют такие числа M_1 и M_2 , что $|f(x)| \leq M_1$ для всех $x \in X_1$ и $|f(x)| \leq M_2$ для всех $x \in X_2$. Но из

$x \in X_1 \cup X_2$ следует, что $x \in X_1$ или $x \in X_2$, а потому $|f(x)| \leq M_1$ или $|f(x)| \leq M_2$. Значит, $|f(x)| \leq M$ для всех $x \in X_1 \cup X_2$, где M — большее из чисел M_1 и M_2 ($M = \max(M_1, M_2)$).

б) Если функции f и g ограничены на множестве X , то их сумма $f + g$ и произведение fg ограничены на X .

В самом деле, по условию существуют такие числа M_1 и M_2 , что для всех $x \in X$ имеем $|f(x)| \leq M_1$ и $|g(x)| \leq M_2$. Но тогда для всех $x \in X$ имеем:

$|f + g|(x) = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M_1 + M_2$, а потому функция $f + g$ ограничена на X .

Ограниченность произведения fg доказывается аналогично.

в) Если функция f ограничена на X сверху, то функция $-f$ ограничена на X снизу.

В самом деле, из $f(x) \leq M$ вытекает, что $-f(x) \geq -M$.

г) Если функция f положительна на X и ограничена на X снизу положительным числом, то функция $\frac{1}{f}$ ограничена на X .

В самом деле, по условию существует такое $M > 0$, что для всех $x \in X$ имеем $M \leq f(x)$. Но тогда $0 < \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{M}$. Это и означает, что функция $\frac{1}{f}$ ограничена на X .

Пример 3. Докажем, что функции $x^3 + 5x^2 + x + 3$ и $\frac{1}{x^3 + 5x^2 + x + 3}$ ограничены на отрезке $[0; 1]$.

Решение. Функция x ограничена на $[0; 1]$, так как на этом отрезке выполняется неравенство $0 \leq x \leq 1$. Постоянные функции f и g , где $f(x) = 5$, а $g(x) = 3$, также ограничены на $[0; 1]$. Заданную функцию можно представить как сумму произведений ограниченных функций:

$$x^3 + 5x^2 + x + 3 = x \cdot x \cdot x + 5 \cdot x \cdot x + x + 3,$$

а тогда по утверждению б) функция ограничена на $[0; 1]$.

Так как значения функции $x^3 + 5x^2 + x + 3$ на $[0; 1]$ не меньше, чем 3, и она ограничена, то по утверждению г) функция $\frac{1}{x^3 + 5x^2 + x + 3}$ ограничена на $[0; 1]$.

Сформулируем теперь отрицания введенных понятий, т. е. определим, что значат слова: «функция f неограничена сверху на множестве X », «функция f неограничена снизу на множестве X », «функция f неограничена на множестве X ». По общему правилу для этого надо записать определения исходных понятий в кванторах, заменить все \forall на \exists и все \exists на \forall , а высказывание, стоящее в конце цепочки, заменить его отрицанием. Так как отрицанием высказывания $x \leq M$ является $x > M$, а отрицанием высказывания $x \geq M$ является $x < M$, то имеем такие определения:

f неограничена сверху на X : $(\forall M) (\exists x \in X) f(x) > M$,

f неограничена снизу на X : $(\forall M) (\exists x \in X) f(x) < M$,

f неограничена на X : $(\forall M) (\exists x \in X) |f(x)| > M$.

Предоставляем читателю дать словесные формулировки этих определений.

Пример 4. Докажем, что функция f , где $f(x) = \frac{1}{x}$, не является ограниченной на $]0; 1[$.

Решение. Возьмем произвольное $M > 0$ и докажем, что существует $x \in]0; 1[$, такое, что $\left| \frac{1}{x} \right| > M$, т. е. $\frac{1}{x} > M$. Это и будет означать неограниченность функции $\frac{1}{x}$ на $]0; 1[$. Возьмем $x = \frac{1}{2M}$. Тогда $\frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{1}{2M}} = 2M > M$. Неограниченность функции доказана.

Заметим, что на любом интервале $]\varepsilon; 1[$, где $\varepsilon > 0$, эта функция ограничена: если $0 < \varepsilon < x$, то $\frac{1}{x} < \frac{1}{\varepsilon}$.

Пример 5. Докажем, что функция f , где $f(x) = x \cos 2\pi x$, $-\infty < x < +\infty$, не ограничена.

Решение. При $x = n$, $n \in \mathbf{N}$, имеем $f(n) = n \cos 2\pi n = n$, и потому $f(x)$ принимает сколь угодно большие значения.

Если функция f ограничена на множестве X , то множество ее значений на X имеет точную верхнюю и точную нижнюю грани. Их обозначают $\sup_x f(x)$ и $\inf_x f(x)$. Индекс X обычно опускают. Числа $\sup f(x)$ и $\inf f(x)$ могут как принадлежать, так и не принадлежать множеству значений функций.

Пример 6. Для функции $\sin x$, $x \in \mathbf{R}$, имеем:

$$\sup f(x) = 1, \inf f(x) = -1.$$

Значения 1 и -1 принадлежат множеству значений функции.

Пример 7. Для функции $\frac{x^2}{x^2 + 4}$, $x \in \mathbf{R}$, имеем:

$$\sup f(x) = 1 \text{ и } \inf f(x) = 0.$$

Значение 0 функция принимает при $x = 0$. Значение 1 эта функция не принимает ни при каком x . Но среди значений функции есть сколь угодно близкие к 1. Например, при $x = 1000$ имеем $f(1000) = \frac{1000^2}{1000^2 + 4} = 1 - \frac{4}{1000004}$. Это значение отличается от 1 меньше чем на 0,000004.

22. Монотонные функции. С отношением порядка в \mathbf{R} связано и понятие монотонности функции. Оно состоит в том, что отображение $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ либо сохраняет отношение порядка в \mathbf{R} , либо заменяет его на обратное. Однако, поскольку наряду с отношением строгого порядка в \mathbf{R} определено и отношение нестрогого порядка, нужно уточнить это определение.

Определение 3.4. Функция называется:

а) *возрастающей* на X , если для любых $x_1, x_2 \in X$, таких, что $x_1 < x_2$, имеем $f(x_1) < f(x_2)$:

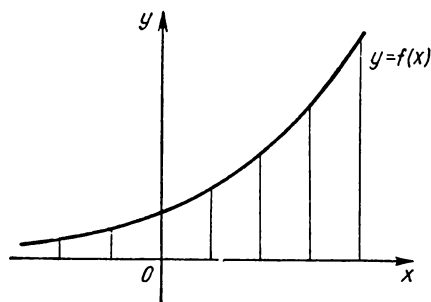


Рис. 36

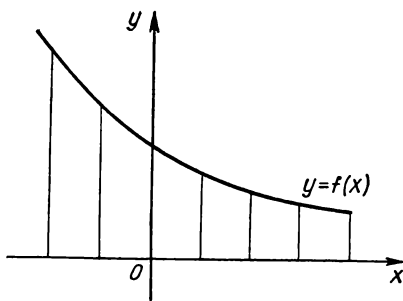


Рис. 37

$$(\forall x_1, x_2 \in X) (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2));$$

б) *убывающей* на X , если

$$(\forall x_1, x_2 \in X) (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2));$$

в) *неубывающей* на X , если

$$(\forall x_1, x_2 \in X) (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2));$$

г) *невозрастающей* на X , если

$$(\forall x_1, x_2 \in X) (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)).$$

Как и понятие ограниченности, свойства монотонности можно рассматривать не для самой функции f , а для ее сужения на некоторое подмножество $X_1 \subset X$. В этом случае говорят, что функция f *возрастает* (соответственно *убывает*, *не возрастает*, *не убывает*) на множестве X_1 .

При движении вдоль оси абсцисс слева направо ордината графика возрастающей функции увеличивается (рис. 36), а ордината графика убывающей функции уменьшается (рис. 37). График неубывающей функции может иметь «площадки» (рис. 38). На рисунке 39 изображен график невозрастающей функции.

Если функция *возрастает* (*убывает*, *не возрастает*, *не убывает*) на X , то говорят, что она *монотонна* на X .

Пример 8. Докажем, что функция x^3 *возрастает* на всей числовой прямой.

Решение. Пусть $x_1 < x_2$. Тогда

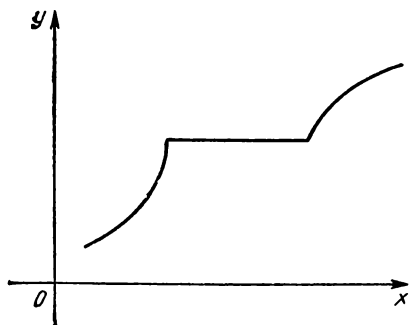


Рис. 38

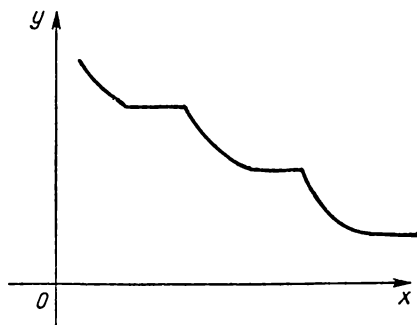


Рис. 39

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) = \\ &= (x_2 - x_1)\left(\left(x_2 + \frac{x_1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_1^2\right). \end{aligned}$$

Так как $x_2 - x_1 > 0$ и $\left(x_2 + \frac{x_1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_1^2 > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$.
Итак,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Значит, функция x^3 возрастает на всей числовой прямой.

Пример 9. Докажем, что функция $\sin x$ возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Пусть $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$f(x_2) - f(x_1) = \sin x_2 - \sin x_1 = 2 \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \cos \frac{x_2 + x_1}{2}.$$

Так как $x_1 \leq \frac{\pi}{2}$, $x_2 \leq \frac{\pi}{2}$, $x_1 \neq x_2$, то $\frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2}$, а так как $-\frac{\pi}{2} \leq x_1$, $-\frac{\pi}{2} < x_2$, то $\frac{x_1 + x_2}{2} > -\frac{\pi}{2}$. Значит, $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2}$, а потому $\cos \frac{x_1 + x_2}{2} > 0$. С другой стороны, из $x_1 < x_2$ получаем, что $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$, и потому $\sin \frac{x_2 - x_1}{2} > 0$. Но тогда и $f(x_2) - f(x_1) > 0$, т. е. $\sin x$ возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

При исследовании функций на монотонность бывают полезны следующие утверждения:

а) Если функции f и g возрастают (убывают) на множестве X , то их сумма $f + g$ возрастает (убывает) на этом множестве.

б) Если функция f возрастает (убывает) на множестве X , то функция $-f$ убывает (возрастает) на этом множестве.

в) Если функции f и g неотрицательны на множестве X и возрастают (убывают) на этом множестве, то их произведение fg возрастает (убывает) на X .

г) Если функция f положительна на множестве X и возрастает (убывает) на этом множестве, то функция $\frac{1}{f}$ убывает (возрастает) на X .

д) Если функция f возрастает (убывает) на множестве X , а функция g возрастает (убывает) на множестве $f(X)$, то их композиция $g \circ f$ возрастает (убывает) на множестве X .

Для примера докажем утверждения а) и д).

а) Пусть функции f и g возрастают на X , и пусть $x_1, x_2 \in X$ и $x_1 < x_2$. Тогда имеют место неравенства $f(x_1) < f(x_2)$ и $g(x_1) < g(x_2)$.

Из них следует, что $f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2)$.

Значит, $(f + g)(x_1) < (f + g)(x_2)$, а потому функция $f + g$ возрастает на X .

д) Пусть функции f и g возрастают, и пусть $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$. Тогда в силу возрастания f имеем $f(x_1) < f(x_2)$, а отсюда в силу возрастания g имеем $g(f(x_1)) < g(f(x_2))$, т. е. $(g \circ f)(x_1) < (g \circ f)(x_2)$. Это и значит, что функция $g \circ f$ возрастает на X .

Пользуясь утверждениями а) — д), легко доказать, например, что разность возрастающей и убывающей функций возрастает, а также, что функция $\frac{f}{g}$, где f и g положительны, f возрастает, а g убывает на

X , является возрастающей функцией на X . Предоставляем читателю сформулировать утверждения, аналогичные а) — д) для неубывающих и невозрастающих функций. Отметим еще, что прибавление к функции f любого числа, а также умножение функции f на любое положительное число не изменяют характера монотонности этой функции.

Пример 10. Докажем, что функция x^n возрастает на $[0; +\infty[$.

Решение. Функция x^n является произведением n функций, каждая из которых равна x . Так как множители неотрицательны и возрастают на $[0; +\infty[$, то и функция x^n возрастает на $[0; +\infty[$.

Пример 11. Докажем, что на $]-\infty; 0]$ функция x^n при четном n убывает, а при нечетном n возрастает.

Решение. Если $x_1 < x_2 \leq 0$, то $0 \leq -x_2 < -x_1$, и потому $0 \leq (-x_2)^n < (-x_1)^n$. Если n четно, то отсюда получаем, что $x_2^n < x_1^n$, чем доказано убывание функции x^n на $]-\infty; 0]$. Если же n нечетно, то получаем, что $-x_2^n < -x_1^n$, т. е. что $x_1^n < x_2^n$, и потому при нечетном n функция x^n возрастает на $]-\infty; 0]$.

Пример 12. Докажем, что функция $4 + 3x^2 + 6x^5$ возрастает на $[0; +\infty[$.

Решение. Данная функция является суммой числа 4 и функций $3x^2, 6x^5$, возрастающих на $[0; +\infty[$, а потому она возрастает на $[0; +\infty[$.

Пример 13. Докажем, что функция $\sqrt[n]{x}$ возрастает на $[0; +\infty[$.

Решение. Пусть $0 \leq x_1 < x_2$. Из $\sqrt[n]{x_1} > \sqrt[n]{x_2}$ следовало бы, что $(\sqrt[n]{x_1})^n \geq (\sqrt[n]{x_2})^n$, т. е. $x_1 \geq x_2$ вопреки предположению. Значит, $\sqrt[n]{x_1} < \sqrt[n]{x_2}$, а потому функция $\sqrt[n]{x}$ возрастает на $[0; +\infty[$.

Пример 14. Докажем, что функция $\sqrt{x^2 + 4}$ возрастает на $[0; +\infty[$.

Решение. Данная функция является композицией функций $f: x \rightarrow x^2 + 4$ и $g: x \rightarrow \sqrt{x}$, причем $x^2 + 4$ возрастает на $[0; +\infty[$ и принимает значения от 4 до $+\infty$, а g возрастает на $[4; +\infty[$. Поэтому функция $\sqrt{x^2 + 4}$ возрастает на $[0; +\infty[$ от $\sqrt{4} = 2$ до $+\infty$.

23. Четные и нечетные функции. Перейдем теперь к изучению свойств функций, связанных с их поведением при тех или иных преобразованиях аргумента. Простейшим из них является переход от функции f к функции g , такой, что $g(x) = f(-x)$, т. е. композиция функции $x \rightarrow -x$ с функцией f . Вообще говоря, эта композиция отли-

чается от исходной функции f . Однако для некоторых функций она совпадает с f , а в других отличается от f лишь знаком.

Например, для функции x^2 при всех x выполняется равенство $(-x)^2 = x^2$, для функции x^3 при всех x выполняется равенство $(-x)^3 = -x^3$.

О п р е д е л е н и е 4.4. Функция f , заданная на множестве X , называется *четной*, если для любого $x \in X$ выполняется равенство

$$f(-x) = f(x). \quad (1)$$

О п р е д е л е н и е 5.4. Функция f , заданная на множестве X , называется *нечетной*, если для всех $x \in X$ выполняется равенство

$$f(-x) = -f(x). \quad (2)$$

Например, функция x^2 четна, а функция x^3 нечетна. Вообще, если число n четно, то и функция x^n четна, а если число n нечетно, то и функция x^n нечетна.

З а м е ч а н и е. Поскольку равенства (1) и (2) могут выполняться лишь в случае, когда обе его части имеют смысл, то как для четных, так и для нечетных функций область определения X должна обладать следующим свойством *симметричности*: вместе с каждым числом x ей должно принадлежать противоположное ему число $-x$.

П р и м е р 15. Докажем, что функция x^3 , $x \in [-4; 7]$, не является ни четной, ни нечетной.

Р е ш е н и е. Область определения этой функции не обладает указанным выше свойством симметрии: ей принадлежит число 7, но не принадлежит число -7 . Поэтому функция не является ни четной, ни нечетной.

При исследовании на четность или нечетность функции f , заданной своим выражением, заменяют в этом выражении x на $-x$ и проверяют: а) тождественно ли получившееся выражение выражению, задающему f ; б) отличается ли оно от него лишь знаком.

П р и м е р 16. Докажем, что функция $x^4 + 5x^2 + 1$ четна.

Р е ш е н и е. При замене x на $-x$ в выражении $x^4 + 5x^2 + 1$ получаем $f(-x) = (-x)^4 + 5(-x)^2 + 1$. Но

$$f(-x) = (-x)^4 + 5(-x)^2 + 1 = x^4 + 5x^2 + 1 = f(x).$$

Значит, данная функция четна.

П р и м е р 17. Докажем, что функция $x|x|$ нечетна.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$f(-x) = (-x)|-x| = -x|x| = -f(x).$$

Значит, $x|x|$ — нечетная функция.

При доказательстве четности или нечетности функций бывают полезны следующие утверждения:

а) *Сумма двух четных функций (соответственно двух нечетных функций) является четной (соответственно нечетной) функцией.*

б) *Произведение двух четных функций является четной функцией; произведение двух нечетных функций также является четной функцией.*

в) *Произведение четной функции на нечетную является нечетной функцией.*

г) Если функция f четна, а функция g определена на $f(X)$, то функция $g \circ f$ тоже четна.

д) Если функция f нечетна, а функция g определена на $f(X)$ и четна (нечетна), то функция $g \circ f$ четна (нечетна).

Для примера докажем утверждения б) и г).

б) Пусть функции f и g четны и определены при некотором значении x . Тогда $f(-x) = f(x)$, $g(-x) = g(x)$, и потому

$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = (fg)(x).$$

Значит, fg — четная функция.

Аналогично в случае нечетности f и g имеем:

$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = (fg)(x),$$

и потому fg — четная функция. Утверждение б) доказано.

г) Пусть f — четная функция, а g — любая функция, определенная на $f(X)$. Тогда $f(-x) = f(x)$, и потому

$$(g \circ f)(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

Значит, функция $g \circ f$ четна. Утверждение г) доказано.

Пример 18. Докажем, что любая функция вида $f(x^2)$ четна.

Решение. Так как x^2 — четная функция, то утверждение вытекает из г).

Пример 19. Докажем, что любая функция вида $x^2 f(x^2)$ нечетна.

Решение. Эта функция является произведением четной функции $f(x^2)$ и нечетной функции x^2 , а значит, нечетна в силу утверждения в).

Теорема 1.4. Любую функцию f , заданную на симметричном множестве X , можно представить в виде суммы четной и нечетной функций.

Доказательство. Возьмем произвольное $x \in X$ и запишем $f(x)$ в следующем виде:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Обозначим $\frac{f(x) + f(-x)}{2}$ через $\varphi(x)$. Мы имеем:

$$\varphi(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \varphi(x).$$

Значит, $\varphi(x)$ — четная функция. Точно так же доказывается, что второе слагаемое $\psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ — нечетная функция.

Для графиков четных и нечетных функций справедливы утверждения.

1. График четной функции симметричен относительно оси ординат.

В самом деле, вместе с каждой точкой $M(x; f(x))$ график четной функции содержит симметричную относительно оси ординат точку $N(-x; f(x))$, ведь $f(-x) = f(x)$ (рис. 40).

2. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

В самом деле, вместе с каждой точкой $M(x; f(x))$ график нечетной функции содержит симметричную относительно начала координат точку $N(-x; -f(x))$, ведь $f(-x) = -f(x)$ (рис. 41).

Справедливы и обратные утверждения:

Если график функции f симметричен относительно оси ординат, то эта функция четна.

Если график функции f симметричен относительно начала координат, то эта функция нечетна.

Доказательство этих утверждений предоставляем читателю.

24. Периодические функции.

В природе и технике часто встречаются явления, периодически повторяющиеся через некоторые промежутки времени. Примерами таких явлений могут служить вращение Земли вокруг Солнца (расстояние от Земли до Солнца меняется с периодом в 1 год), незатухающие электромагнитные колебания и т. д. Периодические колебания описываются с помощью периодических функций.

О п р е д е л е н и е 6.4. Функция f , заданная на множестве X , называется *периодической в периодом T* , если для любого $x \in X$ выполняется равенство

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T). \quad (3)$$

Число $T = 0$ является периодом любой функции, а вместе с T и $-T$ является периодом. Поэтому достаточно рассматривать лишь положительные периоды.

З а м е ч а н и е. Из равенства (3) и существования $f(x)$ вытекает существование $f(x - T)$ и $f(x + T)$. Отсюда следует, что область задания X функции f , имеющей период T , сама должна обладать следующим свойством периодичности: вместе с каждым числом x множество X содержит числа $x - T$ и $x + T$.

Поэтому, например, функция, заданная лишь на луче $[0; +\infty[$, не может быть периодической.

Пусть T_1 и T_2 — периоды функции f . Тогда их сумма $T_1 + T_2$ также является периодом f , так как

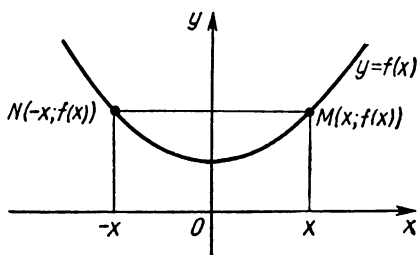


Рис. 40

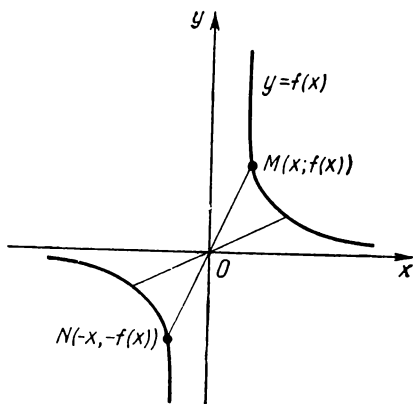


Рис. 41

$$\begin{aligned} f(x + T_1 + T_2) &= f((x + T_1) + T_2) = f(x + T_1) = f(x), \\ f(x - T_1 - T_2) &= f((x - T_1) - T_2) = f(x - T_1) = f(x). \end{aligned}$$

В частности, если T_1 кратно периоду T для f , $T_1 = nT$, $n \in \mathbb{Z}$, то T_1 тоже является периодом для f . Значит, *периодическая функция имеет бесконечное множество периодов*. Если среди положительных периодов функции f есть наименьший, его называют *основным периодом* этой функции. В этом случае *все периоды кратны основному периоду T* . В самом деле, предположим, что период T_1 функции f не кратен основному периоду T . Тогда $T_1 = nT + T_2$, где $0 < T_2 < T$. Но T_1 и nT — периоды функции f , тогда и $T_2 = T_1 - nT$ тоже период для f , а это противоречит тому, что T — наименьший положительный период для f .

Пусть функция f имеет основной период T . Тогда, зная значения f на $[0; T[$ или на $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}[$, легко найти остальные значения, пользуясь периодичностью f . Поэтому при построении графика периодической функции достаточно построить этот график на $[0; T[$ или на $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}[$, а потом сдвинуть полученный график на $\pm T, \pm 2T, \dots$ и т. д. вдоль оси абсцисс.

Пример 20. Найдем основной период функции $\cos x, \sin x$.

Решение. Так как числам x и $x + 2\pi$ соответствует одна и та же точка на окружности, то для любого x имеет место равенство

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

Значит, 2π — это один из периодов для $\cos x$. Покажем, что 2π — наименьший из положительных периодов для $\cos x$, т. е. основной период. В самом деле, пусть $0 < T < 2\pi$. Если бы для всех x имело место равенство $\cos(x + T) = \cos x$, то оно было бы справедливым и для $x = 0$: $\cos T = \cos 0 = 1$. Но $\cos x = 1$, если $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Значит, $T = 2\pi k$, а это противоречит тому, что $0 < T < 2\pi$. Итак, функция $\cos x$ не имеет положительных периодов, меньших, чем 2π , т. е. 2π — основной период этой функции. Точно так же доказывается, что основной период функции $\sin x$ равен 2π .

Пример 21. Найдем основной период функции $\operatorname{tg} x$.

Решение. Данная функция определена на множестве, получаемом из \mathbb{R} удалением точек вида $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, которое обладает свойством периодичности с периодом π . Покажем, что π является периодом функции $\operatorname{tg} x$. Имеем:

$$\operatorname{tg}(x \pm \pi) = \frac{\sin(x \pm \pi)}{\cos(x \pm \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x.$$

Положительных периодов, меньших, чем π , функция $\operatorname{tg} x$ не имеет: если $0 < T < \pi$, то $\operatorname{tg} T \neq 0$, и потому $0 = \operatorname{tg} 0 \neq \operatorname{tg} T$. Значит, ни одно положительное число T , меньшее π , не является периодом для $\operatorname{tg} x$.

Пример 22. Пусть дана функция f , где

$$f(x) = A_1 \sin(\omega_1 x + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_2 x + \alpha_2) + \dots + A_n \sin(\omega_n x + \alpha_n),$$

причем все числа $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ различны и соизмеримы. Докажем, что $2\pi a$, где a — общее кратное чисел $\frac{1}{\omega_1}, \frac{1}{\omega_2}, \dots, \frac{1}{\omega_n}$, — период функции f .

Решение. Так как a кратно $\frac{1}{\omega_1}$, то $a = \frac{1}{\omega_1} k, k \in \mathbb{Z}$, и потому

$$\begin{aligned}\sin(\omega_1(x + 2\pi a) + \alpha_1) &= \sin(\omega_1 x + \omega_1 2\pi a + \alpha_1) = \\ &= \sin(\omega_1 x + \omega_1 2\pi \frac{1}{\omega_1} k + \alpha_1) = \\ &= \sin(\omega_1 x + 2\pi k + \alpha_1) = \sin(\omega_1 x + \alpha_1).\end{aligned}$$

Значит, $2\pi a$ — период функции $\sin(\omega_1 x + \alpha_1)$. Аналогично доказывается, что $2\pi a$ — период функций $\sin(\omega_2 x + \alpha_2), \dots$, а потому $2\pi a$ — период функции f .

Можно доказать, что если a — наименьшее общее кратное чисел $\frac{1}{\omega_1}, \dots, \frac{1}{\omega_n}$, то a — основной период функции f .

Например, если $f(x) = \sin x + \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{3}$, то $\omega_1 = 1, \omega_2 = \frac{1}{2}, \omega_3 = \frac{1}{3}$ и наименьшее общее кратное чисел $\frac{1}{\omega_1} = 1, \frac{1}{\omega_2} = 2, \frac{1}{\omega_3} = 3$ равно 6. Поэтому основной период функции f равен $2\pi \cdot 6 = 12\pi$.

Пример 23. Найдём основной период функции $\{x\}$, где $\{x\}$ — дробная часть числа x .

Решение. Для любого x имеем $\{x\} = \{x + 1\} = \{x - 1\}$, так как дробные части чисел $x, x - 1, x + 1$ совпадают. Значит, число 1 — период для $\{x\}$. Этот период основной, поскольку при $0 < T < 1$ равенство $\{x + T\} = \{x\}$ не выполняется для $x = 0$. График функции $\{x\}$ изображен на рисунке 42.

Пример 24. Пусть $D(x)$ — функция Дирихле (см. с. 35). Покажем, что любое рациональное число r является периодом этой функции.

Решение. Пусть x — иррациональное число. Тогда $x + r, x - r$ тоже иррациональные числа, а потому $D(x) = D(x \pm r) = 0$.

Аналогично, если x — рациональное число, то и $x + r, x - r$ рациональны, а потому $D(x) = D(x + r) = D(x - r) = 1$. Значит, при любом x имеем $D(x) = D(x + r) = D(x - r)$, т. е. r — период функции $D(x)$. Поскольку среди рациональных чисел нет наименьшего положительного, функция $D(x)$ не имеет основного периода.

Пример 25. Докажем, что функция $\sin \pi x^2$ не является периодической.

Решение. Решим уравнение $\sin \pi x^2 = 0$. Имеем $\pi x^2 = \pi k, k = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$x = \pm \sqrt{k}.$$

Выпишем найденные корни: $\dots, -\sqrt{5}, -2, -\sqrt{3}, -\sqrt{2}, -1, 0,$

$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \dots$

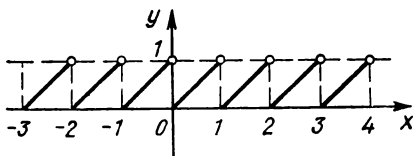


Рис. 42

Замечаем, что разности двух соседних чисел не одинаковы для различных пар чисел. Это значит, что точки пересечения графика функции $\sin \pi x^2$ с осью Ox не повторяются периодически, а потому функция $\sin \pi x^2$ не является периодической.

Отметим, что если функция f задана на X и имеет период, а функция g задана на $f(X)$, то функция $g \circ f$ имеет тот же период.

В самом деле, $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$, и потому

$$(g \circ f)(x - T) = g(f(x - T)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

и

$$(g \circ f)(x + T) = g(f(x + T)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

Например, функция $\cos x$ имеет период 2π . Тогда тот же период имеют функции $\cos^3 x + 1$, $\sqrt[5]{2 - \cos x}$ и т. д.

25. Последовательности. Функции, заданные на множестве N натуральных чисел, называют *последовательностями*. Иными словами, последовательность задана, если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число $f(n)$. Это число называют *n -м членом последовательности*. Обычно вместо $f(n)$ пишут a_n , а последовательность обозначают: $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ или (a_n) .

Поскольку последовательности являются функциями на N , для них определены многие понятия, введенные выше для функций: ограниченность и неограниченность, монотонность.

Последовательность (a_n) называется *возрастающей*, если для всех $n \in N$ имеем $a_n < a_{n+1}$:

$$(\forall n \in N) a_n < a_{n+1},$$

и убывающей, если

$$(\forall n \in N) a_n > a_{n+1}.$$

Понятия четности и нечетности для последовательностей не имеют смысла, так как при $n \in N$ имеем $-n \notin N$.

Последовательность (a_n) называется:

а) *ограниченной сверху*, если $(\exists b) (\forall n \in N) a_n \leq b$;

б) *ограниченной снизу*, если $(\exists b) (\forall n \in N) a_n \geq b$;

в) *ограниченной*, если $(\exists M > 0) (\forall n \in N) |a_n| \leq M$.

Последовательности чаще всего задаются с помощью выражения a_n через n . Например, $a_n = \frac{n^3}{n^3 + 10}$, $a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$ (напомним, что $1! = 1$, $0! = 1, \dots$, а при $n \in N$, $n > 1$, $n!$ означает $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$).

Зная выражение для a_n , можно найти любой член последовательности. Например, для последовательности с общим членом $a_n = \frac{n^3}{n^3 + 10}$ имеем $a_1 = \frac{1^3}{1^3 + 10} = \frac{1}{11}$; $a_2 = \frac{2^3}{2^3 + 10} = \frac{4}{7}$ и т. д.

Заметим, что обратная операция — нахождение выражения n -го члена последовательности по нескольким первым членам этой последовательности — не имеет однозначного решения. Например, для задания последовательности 1, 2, 4, 8, 16, ... наряду с выражением $a_n = 2^{n-1}$ подходит и выражение

$$a_n = n + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

Таким образом, можно лишь ставить задачу о нахождении хотя бы одного выражения для a_n по заданным первым членам последовательности (a_n) .

Последовательности могут быть заданы и соотношением, задающим выражение n -го члена последовательности через ее предыдущие члены. Примерами такого задания являются равенства

$$a_n = a_{n-1} + d; b_n = b_{n-1} \cdot q, q \neq 0, b_1 \neq 0$$

(здесь $n = 2, 3, 4, \dots$), определяющие соответственно арифметическую и геометрическую прогрессии. Рекуррентно задана и *последовательность Фибоначчи*

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots,$$

в которой каждый член (начиная с третьего) равен сумме двух предыдущих. Рекуррентная формула имеет здесь вид:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$$

полное рекуррентное задание последовательности таково:

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ где } n = 3, 4, 5, 6, \dots$$

Рассмотрим еще один важный пример рекуррентно заданной последовательности.

Пример 26. Пусть нужно извлечь квадратный корень из положительного числа a . Возьмем какое-нибудь приближенное значение x_1 этого корня по избытку. Так как при $a \geq 1$ имеем $a \geq \sqrt{a}$, а при $0 < a \leq 1$ имеем $1 \geq \sqrt{a}$, то в качестве x_1 можно взять большее из чисел a и 1, т. е. положить $x_1 = \max(a, 1)$. Тогда $\frac{a}{x_1}$ — приближенное значение корня по недостатку. Среднее арифметическое $\frac{1}{2}(x_1 + \frac{a}{x_1})$ этих приближений будет более точным приближенным значением корня, чем x_1 и $\frac{a}{x_1}$. Так как среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше их среднего геометрического, то $x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + \frac{a}{x_1}) \geq \sqrt{x_1 \cdot \frac{a}{x_1}} = \sqrt{a}$. Значит, x_2 — приближенное значение корня по избытку. Тогда $\frac{a}{x_2}$ — приближенное значение корня по недостатку. Рассуждая, как и выше, находим более точное приближение корня по избытку $x_3 = \frac{1}{2}(x_2 + \frac{a}{x_2})$. Вообще, если уже найдено приближенное значение x_n для \sqrt{a} , то следующее приближение выражается формулой

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Таким образом, здесь мы пришли к рекуррентной последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, где $x_1 = \max(a, 1)$, $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$.

Вычисляя, например, методом последовательных приближений $\sqrt[3]{3}$, получаем $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1,75$, $x_4 = 1,732$, $x_5 = 1,732$, Каждый следующий шаг процесса приводит ко все более точным приближениям для $\sqrt[3]{3}$. Процесс останавливают, когда разность между x_{n+1} и x_n становится меньше, чем требуемая точность вычислений. Например, если надо вычислить $\sqrt[3]{3}$ с точностью 0,001, то достаточно взять пять приближений и положить $\sqrt[3]{3} = 1,732$.

Задание последовательности рекуррентным соотношением не всегда удобно: для того чтобы найти, например, a_{1000} , нужно сначала найти 999 предыдущих членов. Но может случиться, что нас интересует только значение a_{1000} . Поэтому в случае последовательности, заданной рекуррентным соотношением, бывает полезно получить формулу для n -го члена. Иногда это удается (например, для арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + d(n-1)$, для геометрической прогрессии: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$), а иногда нет (например, для последовательности, получающейся при вычислении квадратного корня методом последовательных приближений).

Последовательности задаются не только аналитически или рекуррентно, но и «словесно». Например, для последовательности простых чисел 2, 3, 5, 7, 11, ... или последовательности десятичных приближений $\sqrt{2}$ по недостатку 1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, ... нельзя найти ни аналитического выражения, ни рекуррентной формулы.

График последовательности (a_n) состоит из изолированных точек плоскости $M(n; a_n)$. На рисунке 43 изображен график последовательности (a_n) , где $a_n = \frac{n}{n+1}$.

Пример 27. Докажем, что последовательность с общим членом $a_n = \frac{n}{n+1}$ возрастает.

Решение. Мы имеем $a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$, и потому

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0.$$

Так как $a_{n+1} - a_n > 0$, то для всех n выполняется неравенство $a_n < a_{n+1}$, значит, (a_n) возрастает.

Пример 28. Докажем, что последовательность (a_n) с общим членом $a_n = \frac{n^2 + 4}{n^2 + 9}$ ограничена.

Решение. Мы имеем $0 < n^2 + 4 < n^2 + 9$, поэтому

$$0 < \frac{n^2 + 4}{n^2 + 9} < 1.$$

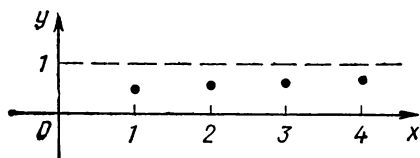


Рис. 43

Это означает, что заданная последовательность ограничена и сверху, и снизу, т. е. является ограниченной.

Вопросы для самопроверки

1. Какая функция называется ограниченной на множестве X сверху? снизу? Какая функция называется ограниченной на множестве X ?
2. Постройте пример функции, заданной на $[a; b]$ и ограниченной на нем; ограниченной сверху, но не ограниченной снизу на $[a; b]$; ограниченной снизу, но не ограниченной сверху на $[a; b]$.
3. Из приведенных ниже функций выделите ограниченные, неограниченные, ограниченные только сверху, ограниченные только снизу: x^2 , x^3 , $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\frac{1}{x}$, $-\frac{1}{x^2}$.
4. Какие вы знаете свойства ограниченных функций?
5. Какая функция называется возрастающей на множестве X ? убывающей? невозрастающей? неубывающей? монотонной?
6. Какие вы знаете свойства монотонных функций?
7. Приведите пример функции, возрастающей на R ; убывающей на R ; немонотонной на R .
8. Какая функция называется четной? нечетной?
9. Приведите пример четной функции; нечетной функции; функции, не являющейся ни четной, ни нечетной.
10. Какой особенностью обладает область задания четной или нечетной функции?
11. Какой особенностью обладает график четной функции? график нечетной функции?
12. Какие вы знаете свойства четных и нечетных функций?
13. Какая функция называется периодической? Что такое основной период периодической функции?
14. Приведите примеры периодических функций.
15. Какой особенностью обладает область задания периодической функции?
16. Что такое последовательность? ограниченная последовательность? монотонная последовательность?
17. Приведите пример монотонной последовательности; немонотонной последовательности; ограниченной последовательности; ограниченной сверху, но не ограниченной снизу; ограниченной снизу, но не ограниченной сверху.
18. Приведите пример последовательности, множество значений которой состоит из трех элементов.
19. Приведите пример ограниченной последовательности, принимающей наибольшее значение, но не принимающей наименьшего значения; принимающей наименьшее значение, но не принимающей ни наибольшего, ни наименьшего значений.

Упражнения

78. Исследуйте, являются ли нижеприведенные функции ограниченными на заданном множестве. Для ограниченных функций найдите $\sup f(x)$ и $\inf f(x)$. Какие из функций ограничены только сверху или только снизу? Найдите для них $\sup f(x)$ и $\inf f(x)$:

а) $f(x) = x^2$, $-4 \leq x \leq 8$; б) $f(x) = x^2 - 7x + 10$, $0 \leq x \leq 10$;

в) $f(x) = x^2 - 7x + 10$, $0 < x < +\infty$; г) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$, $-2 < x < 2$;

д) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$; е) $f(x) = \{x\}$, $-\infty < x < +\infty$.

79. а) Докажите, что если функции f и g возрастают на X и при этом $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ для всех $x \in X$, то функция $f \cdot g$ возрастает на X .

б) Докажите, что если функция f возрастает на X и не обращается в нуль, то функция $\frac{1}{f}$ убывает на X .

80. Докажите, что функция $\frac{1}{x^n}$ убывает на $[0; +\infty[$.

81. Исследуйте на монотонность следующие функции:

а) $\sqrt[n]{x}$; б) $2x - 1$; в) $-3x + 2$; г) $\lg x$;

д) $\sin^3 x$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$; е) $\sin^3 x$; ж) $E(x)$;

з) $x + \lg x$; и) $-x - \lg x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$; к) $x^2 + x^3 + x$.

82. Найдите промежутки монотонности следующих функций:

а) $x^3 - 4x + 8$; б) $6x - 10 - x^2$; в) $\frac{1}{x^3 - 1}$; г) $\frac{1}{\sin x}$.

Определите, какие из нижеследующих функций четны, какие нечетны, а какие не являются ни четными, ни нечетными:

83. а) $4 - 2x^2 + 6x^4$; б) $\frac{x-2}{x^2+4}$; в) $\frac{x^2+8}{x^2-9}$; г) \sqrt{x} .

84. а) $\sin^2 x - \cos^4 x + \operatorname{ctg}^6 x$; б) $\cos x + \sin^4 x$, $-\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}$;

в) $\frac{x^3 + \sin x}{1 + x^2}$; г) $\frac{x^3 + \sin x}{1 + x^2}$, $-1 \leq x \leq 2$.

85. а) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4, & x \geq 0, \\ -x^2 - 4, & x < 0; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x^2 - 4, & x < 0; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} x^3 + \sin x, & x \geq 0, \\ -x^3 - \sin x, & x < 0. \end{cases}$

86. Представьте нижеследующие функции в виде суммы четной и нечетной функций:

а) $4x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 5$; б) $2 \sin x - 4 \cos 3x + 1 + \lg x$.

87. Является ли четной функция а) $\sqrt{\cos x}$; б) $\cos \sqrt{x}$?

88. Может ли быть четной функция, заданная на числовом множестве;

а) $]-6; 6]$; б) $\{x \mid |x| \leq 3\}$;

в) $\{x \mid |x-1| \leq 4\}$; г) $\{x \mid x > 9\}$?

89. Используя свойства четных и нечетных функций, исследуйте на четность и нечетность следующие функции:

а) $\sin^2 x + \frac{5-x^2}{x^2} + x^4 - 6x^2 + 11$; б) $\frac{\cos x^3 + 7x^{12}}{x^6 + \sin^2 x^3}$;

в) $\lg x^3 + 4x^3$; г) $\sin^5 3x \cos^2 6x$.

90. Функция f имеет период 2 и на $[-1; 1]$ совпадает с функцией x . а) Найдите значения $f(4,5)$; $f(3,2)$; $f(-1,7)$. б) Начертите график функции. в) Какое выражение имеет f на $[2n-1; 2n+1]$, $n \in \mathbb{Z}$?

91. Докажите, что если функция f имеет период T , то функция g , где $g(x) = f(ax+b)$, $a \neq 0$, тоже является периодической функцией. Чему равен ее период?

92. Найдите основные периоды следующих функций:

а) $\cos \frac{x}{3}$; б) $\sin 4x$; в) $2 \sin 6x + \sin 5x$; г) $\cos \pi x$; д) $\lg^2 2x + 1$.

93. Докажите, что следующие функции не являются периодическими:

а) $\sin \frac{1}{x}$; б) $\cos x^2$; в) $\sin x^3$.

94. а) Функцию $x + 1$, $0 \leq x < 4$, продолжите периодически на всю числовую прямую (с периодом 4). Постройте график полученной функции.

б) Функцию $x^2 + 3$, $-1 \leq x < 1$, продолжите периодически на всю числовую прямую (с периодом 2). Постройте график полученной функции.

95. а) Функцию f , где $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi, \end{cases}$ продолжите на $]-\pi; 0]$ так,

чтобы получилась нечетная функция, а потом периодически продолжите полученную функцию на всю числовую прямую (с периодом 2π).

б) Постройте график полученной функции F .

в) Вычислите $F\left(\frac{3}{2}\pi\right)$, $F\left(-\frac{7}{6}\pi\right)$, $F\left(21\frac{1}{3}\pi\right)$, $F\left(-\frac{100}{3}\pi\right)$.

г) Существуют ли значения $F(\pi)$, $F(3\pi)$?

96. Выпишите первые 5 членов последовательностей, заданных формулами:

а) $a_n = n!$; б) $a_n = \frac{n^2 - 1}{n}$; в) $a_n = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$; г) $a_n = 2^n$.

97. Последовательность задана рекуррентным соотношением $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$. Найдите первые 5 членов последовательностей, если $a_1 = 0$, $a_2 = 1$.

98. Пусть $a_n = n^2 + 1$. Найдите: а) a_{2n} ; б) a_{3+n} ; в) a_n^3 .

99. Найдите хотя бы по одной формуле общего члена для следующих последовательностей: а) 1, 3, 9, 27, 81, ...; б) 2, 5, 10, 17, 26, ...; в) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$; г) $\sqrt{1 \cdot 2}, \sqrt{2 \cdot 3}, \sqrt{3 \cdot 4}, \dots$; д) $\frac{3}{2^2 \cdot 3^2}, -\frac{5}{3^2 \cdot 4^2}, \frac{7}{4^2 \cdot 5^2}, -\frac{9}{5^2 \cdot 6^2}, \dots$

100. Докажите, что последовательность, общий член которой имеет указанный ниже вид, возрастает:

а) $a_n = n^3 + 2n$; б) $a_n = \frac{n^2}{n^2 + 10}$; в) $a_n = \left(1 + \frac{n^4}{n^4 + 8}\right)^3$.

101. Докажите, что последовательность, общий член которой имеет указанный ниже вид, убывает:

а) $a_n = \frac{n^2 + 16}{n^3 + 3}$; б) $a_n = \sqrt{1 + \frac{n^4 + 8}{n^4}}$.

102. Докажите, что последовательность, общий член которой указан ниже, ограничена:

а) $a_n = \frac{1}{n!}$; б) $a_n = \frac{n^4}{n^4 + 16}$.

103. Постройте график последовательности (a_n) , если:

а) $a_n = \frac{n+2}{n}$; б) $a_n = \frac{n^2}{4}$; в) $a_n = 3n - 1$.

§ 5. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

26. Бесконечно малые функции. Масса куска радиоактивного элемента уменьшается с течением времени. При этом, сколько бы ни было вещества вначале, через определенный промежуток времени T , называемый *периодом полураспада* элемента, останется лишь половина первоначального количества (а вторая превратится в другие элементы). График зависимости массы m от времени t имеет вид, показанный на рисунке 44. При безграничном увеличении t масса куска становится сколь угодно малой.

Существует много примеров величин, связанных друг с другом так, что при безграничном увеличении одной из них значения второй безгранично приближаются к нулю: сила F , с которой Земля притягивает удаляющуюся от нее ракету, приближается к нулю по мере увеличения расстояния r от ракеты до Земли; длина y стороны прямоугольника, имеющего площадь S , безгранично уменьшается, когда длина x другой стороны безгранично увеличивается, и т. д.

Для описания величин, связанных друг с другом указанным выше образом, введем понятие бесконечно малой функции. В первом приближении можно сказать, что функция α бесконечно мала при стремлении аргумента к $+\infty$, если при больших положительных значениях аргумента ее график почти сливается с осью абсцисс. На рисунке 45, a — b показаны графики бесконечно малых функций. Из них видно,

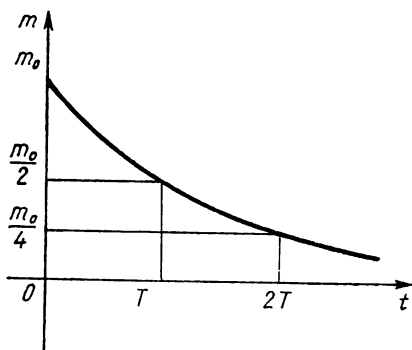


Рис. 44

что бесконечно малые функции могут приближаться к нулю и возрастая, и убывая, и даже колеблясь около нулевого значения.

Если говорить точнее, то слова «график функции α почти сливается с осью абсцисс при больших значениях аргумента» означают следующее: какое бы малое положительное число ε мы ни выбрали, найдется такое число M , что при $x > M$ график функции α целиком лежит в полоске шириной 2ε , симметричной относительно оси абсцисс и ограниченной прямыми $y = -\varepsilon$, $y = \varepsilon$.

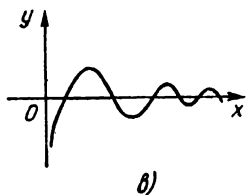
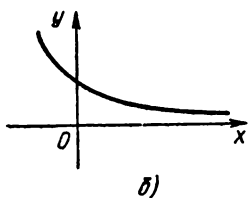
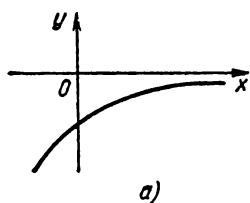


Рис. 45

При $x > M$ для функции α выполняются неравенства $-\varepsilon < \alpha(x) < \varepsilon$. Их можно заменить одним неравенством, содержащим модуль функции: $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Теперь уже можно точно сказать, какие функции называются бесконечно малыми при безграничном увеличении аргумента (при $x \rightarrow +\infty$).

Определение 1.5. Функцию α называют *бесконечно малой* при $x \rightarrow +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется открытый луч $]M; +\infty[$, на котором выполняется неравенство¹ $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

С помощью кванторов определение 1.5 записывается так:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists M) (\forall x > M) |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Поскольку луч $]M; +\infty[$ является полукрестностью $U^+(\infty, M)$ для ∞ (см. с. 26), а неравенство $|x| < \varepsilon$ задает ε -окрестность $U(0, \varepsilon)$ числа 0, то определение 1.5 можно сформулировать следующим образом:

Определение 1.5'. Функцию α называют *бесконечно малой* при $x \rightarrow +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое M , что

$$\alpha(U^+(\infty, M)) \subset U(0, \varepsilon).$$

С помощью кванторов это определение записывается так:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists M) \alpha(U^+(\infty, M)) \subset U(0, \varepsilon).$$

Пример 1. Докажем, что функция $\frac{1}{x}$ бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$.

Решение. Для любого $\varepsilon > 0$ при $x > \frac{1}{\varepsilon}$ выполняется неравенство $\frac{1}{x} < \varepsilon$. Это значит, что функция $\frac{1}{x}$ бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$ (поскольку $\frac{1}{x} > 0$ при $x > 0$, то неравенство $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$ можно заменить на $\frac{1}{x} < \varepsilon$).

¹ Говоря, что неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$ выполняется на $]M; +\infty[$, мы подразумеваем, что функция α определена для всех $x \in]M; +\infty[$ (иначе на этом луче были бы точки, в которых левая часть неравенства не определена).

Пример 2. Докажем, что функция $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$.

Решение. Зададим $\varepsilon > 0$ и решим неравенство $|\sqrt{x+1} - \sqrt{x}| < \varepsilon$. Его можно переписать так:

$$\frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} < \varepsilon,$$

т. е.
$$\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} < \varepsilon.$$

Достаточно показать, что множество решений этого неравенства содержит хотя бы один луч: $]M; +\infty[$. Так как $\sqrt{x+1} > \sqrt{x}$, то $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} > 2\sqrt{x}$, и потому $\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Поэтому если $\frac{1}{2\sqrt{x}} < \varepsilon$, то тем более $\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} < \varepsilon$. Решением неравенства $\frac{1}{2\sqrt{x}} < \varepsilon$ является луч $] \frac{1}{4\varepsilon^2}; +\infty[$. Следовательно, если положить $M = \frac{1}{4\varepsilon^2}$, то при $x > M$ имеем $|\sqrt{x+1} - \sqrt{x}| < \varepsilon$, а потому $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ — бесконечно малая функция.

Постоянная функция, всюду равная нулю, бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$ (так как нуль меньше любого положительного числа). Других постоянных бесконечно малых функций не существует. Иными словами, верна следующая теорема:

Теорема 1.5. Если функция α постоянна и бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$, то она всюду равна нулю.

Доказательство. Предположим противное, т. е. предположим, что постоянная функция α принимает значение $b \neq 0$. Тогда ни при каком значении x не может выполняться неравенство $|\alpha(x)| < |b|$, а поэтому функция α не может быть бесконечно малой при $x \rightarrow +\infty$ вопреки условию. Полученное противоречие доказывает теорему.

Чтобы убедиться в бесконечной малости функции α при $x \rightarrow +\infty$, ее можно сравнить с другой функцией β , о которой заведомо известно, что она бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$.

Теорема 2.5 (о сравнении с бесконечно малой). Если функция β бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$ и существует луч $]P; +\infty[$, на котором выполняется неравенство $|\alpha(x)| \leq |\beta(x)|$, то функция α тоже бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Так как функция β бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется луч $]M; +\infty[$, на котором $|\beta(x)| < \varepsilon$. По условию $|\alpha(x)| \leq |\beta(x)|$ на луче $]P; +\infty[$, поэтому на луче $]P; +\infty[\cap]M; +\infty[$ выполняются оба неравенства:

$$|\alpha(x)| \leq |\beta(x)| \text{ и } |\beta(x)| < \varepsilon,$$

а потому и $|\alpha(x)| < \varepsilon$. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ есть луч, на котором $|\alpha(x)| < \varepsilon$, т. е. функция α бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$.

Из теоремы 2.5 следует, что если функция α бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$, то тем же свойством обладает и функция $|\alpha|$.

Пример 3. Докажем, что функция $\frac{x}{x^2+1}$ бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$.

Решение. Эту функцию можно записать при $x \neq 0$ так: $\frac{x}{x^2+1} = \frac{x^3}{x^2+1} \cdot \frac{1}{x}$. Но при всех x имеем $\frac{x^3}{x^2+1} < 1$. Значит, при $x > 0$ выполняется неравенство $\frac{x}{x^2+1} < \frac{1}{x}$. Поскольку функция $\frac{1}{x}$ бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$ (см. пример 1), то по теореме 2.5 и функция $\frac{x}{x^2+1}$ бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$.

Из теоремы 2.5 вытекает следствие.

Следствие. Если функции α и β бесконечно малы при $x \rightarrow +\infty$, то и произведение $\alpha\beta$ тоже бесконечно мало при $x \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Поскольку функция α бесконечно мала, найдется луч, на котором выполняется неравенство $|\alpha(x)| < 1$. А тогда на этом луче имеем:

$$|\alpha(x) \cdot \beta(x)| = |\alpha(x)| \cdot |\beta(x)| < 1 \cdot |\beta(x)| = |\beta(x)|.$$

Значит, функция $\alpha\beta$ бесконечно мала в силу бесконечной малости функции β и теоремы 2.5.

Пример 4. Докажем, что функция $\frac{1}{x^2}$ бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$.

Решение. Имеем $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}$, причем оба множителя бесконечно малы при $x \rightarrow +\infty$. Значит, $\frac{1}{x^2}$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow +\infty$.

Точно так же доказывается, что любая функция $\frac{1}{x^n}$, где n — натуральное число, бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$.

Не только при умножении, но и при сложении бесконечно малых функций получаются бесконечно малые функции. Иными словами, справедлива следующая теорема:

Теорема 3.5. Если функции α и β бесконечно малы при $x \rightarrow +\infty$, то их сумма $\alpha + \beta$ тоже бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$. Так как функция α бесконечно мала, найдется луч $]M_1; +\infty[$, на котором выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, а так как функция β бесконечно мала, найдется луч $]M_2; +\infty[$, на котором выполняется неравенство $|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. На луче $]M_1; +\infty[\cap]M_2; +\infty[$ выполняются оба неравенства: $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, а потому и неравенство

$$|\alpha(x) + \beta(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это и значит, что функция $\alpha + \beta$ бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$.

Например, функция $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}$ бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$ как сумма двух бесконечно малых функций $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x^3}$.

Теорема 3.5. справедлива не только для двух, но и для любого конечного числа слагаемых. Значит, если функция α бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$, то любая функция вида $n\alpha$, $n \in \mathbb{N}$, бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$.

Отсюда вытекают такие следствия теоремы 3.5.

С л е д с т в и е 1. Если функция α бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$ и A — число, то функция $A\alpha$ тоже бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Найдется натуральное число n , такое, что $|A| < n$. Тогда справедливо неравенство

$$|A\alpha(x)| < |n\alpha(x)|.$$

Но из бесконечной малости α вытекает, что функция $n\alpha$ бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$, а тогда в силу теоремы о сравнении с бесконечно малой бесконечно мала и функция $A\alpha$.

С л е д с т в и е 2. Если функции α и β бесконечно малы при $x \rightarrow +\infty$, то и их разность $\alpha - \beta$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow +\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По следствию 1 функция $(-\beta)$ бесконечно мала, тогда $\alpha + (-\beta)$ — бесконечно малая функция.

С л е д с т в и е 3. Если функция α бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$, а функция f определена и ограничена на некотором луче $]P; +\infty[$, то функция $\alpha \cdot f$ бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как f ограничена на $]P; +\infty[$, то существует такое положительное число A , что при всех $x \in]P; +\infty[$ справедливо неравенство $|f(x)| \leq A$. Но по следствию 1 функция $A \cdot \alpha$ бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$. Поскольку $|\alpha(x) \cdot f(x)| \leq |A \cdot \alpha(x)|$, то в силу теоремы 2.5 и функция $\alpha \cdot f$ бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$.

П р и м е р 5. Докажем, что функция $\frac{a}{x^n}$ бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$.

Р е ш е н и е. Выше было доказано, что $\frac{1}{x}$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow +\infty$. Так как

$$\frac{a}{x^n} = a \cdot \underbrace{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \dots \cdot \frac{1}{x}}_{n \text{ сомножителей}},$$

то $\frac{a}{x^n}$ бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$.

Пример 6. Докажем, что функция

$$\frac{a_1}{x^n} + \frac{a_2}{x^{n-1}} + \dots + \frac{a_n}{x}$$

бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$.

Решение. Эта функция является суммой конечного числа бесконечно малых функций $\frac{a_1}{x^n}, \dots, \frac{a_n}{x}$. Поэтому она бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$.

Пример 7. Докажем, что функция $\frac{\sin^3 x}{x}$ бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$.

Решение. Эта функция является произведением ограниченной функции $\sin^3 x$ и бесконечно малой функции $\frac{1}{x}$. Поэтому она бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$.

Пример 8. Докажем, что функция $\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2+1}$ бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$.

Решение. Справедливо равенство

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2+1} &= \frac{(\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2+1}} = \\ &= \frac{3}{\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2+1}}. \end{aligned}$$

Но при $x > 0$ $\sqrt{x^2+4} > \sqrt{x^2} = x$, $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = x$, поэтому

$$\frac{3}{\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2+1}} < \frac{3}{2x}.$$

Функция $\frac{3}{2x}$ бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$. По теореме о сравнении с бесконечно малой получаем, что и

$\frac{3}{\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2+1}}$, т. е. $\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2+1}$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow +\infty$.

27. Предел функции при $x \rightarrow +\infty$. График функции f , изображенный на рисунке 46, при безграничном возрастании x почти сливается с прямой $y = b$. Говорят, что функция f стремится при $x \rightarrow +\infty$ к пределу b . Чтобы точнее определить это понятие, заметим, что разность $f - b$ бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$. Итак, введем следующее определение:

Определение 2.5. Число b называется пределом функции f при $x \rightarrow +\infty$, если функция $f - b$ бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$, т. е. если

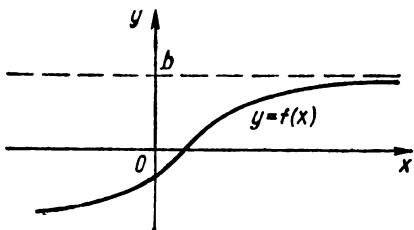


Рис. 46

$f = b + \alpha$, где функция α бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$ ¹.

В этом случае пишут

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b.$$

Пример 9. Докажем, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + x - 4}{x^2} = 3$.

Решение. Так как $\frac{3x^2 + x - 4}{x^2} = 3 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2}$, а функция $\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2}$ бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$, то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + x - 4}{x^2} = 3.$$

Заметим, что если функция α бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$, то разность $\alpha - 0 = \alpha$ тоже бесконечно мала. Это значит, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0$. Обратно, если $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0$, то функция α бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$.

Таким образом, справедливо следующее утверждение:

Теорема 4.5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0$ тогда и только тогда, когда функция α бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$.

Отметим следующее очевидное утверждение:

Теорема 5.5. Если функция f постоянна ($f(x) \equiv c$), то ее предел при $x \rightarrow +\infty$ равен c :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} c = c.$$

Доказательство. Разность $c - c$ равна нулю, а функция, тождественно равная нулю, является бесконечно малой при $x \rightarrow +\infty$. Значит,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} c = c.$$

Чтобы проверить, является ли число b пределом функции f при $x \rightarrow +\infty$, надо вычесть это число из функции и доказать, что разность $f - b$ бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$.

Пример 10. Докажем, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} = 2$.

Решение. Имеем:

$$\frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} - 2 = \frac{2x^2 + 3 - 2x^2 - 2}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Но $\frac{1}{x^2 + 1} < \frac{1}{x^2}$, а функция $\frac{1}{x^2}$ бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$.

¹ Говоря о пределе функции f при $x \rightarrow +\infty$, мы будем предполагать, что функция f определена на некотором открытом луче $]M; +\infty[$, не подчеркивая этого каждый раз.

Поэтому функция $\frac{1}{x^2 + 1}$ тоже бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$. Значит, 2 — предел функции $\frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1}$ при $x \rightarrow +\infty$.

Пример 11. Найдём значение функции $\frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1}$ при $x = 1\,563\,208$ с точностью до 10^{-12} .

Решение. Поскольку $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} = 2$ (см. пример 10), а заданное значение аргумента весьма велико, можно ожидать, что значение функции при этом значении аргумента почти не отличается от числа 2. Надо лишь проверить, что разность между $\frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1}$ и числом 2 при этом значении аргумента не превосходит 10^{-12} . Но эта разность равна $\frac{1}{x^2 + 1}$ и потому меньше, чем $\frac{1}{x^2}$. Поскольку из условия следует, что $x > 10^6$, то $x^2 > 10^{12}$, а $\frac{1}{x^2} < \frac{1}{10^{12}} = 10^{-12}$. Тогда тем более $\frac{1}{x^2 + 1} < 10^{-12}$. Значит, с точностью до 10^{-12} значение функции $\frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1}$ при $x = 1\,563\,208$ равно числу 2.

Пример 12. Докажем, что число $b = 1$ не является пределом функции $\sin x$ при $x \rightarrow +\infty$.

Решение. Для любого M найдётся такое n , что $\pi n > M$.

Но $\sin \pi n = 1 = -1$, т. е. на любом луче $]M; +\infty[$ есть точка x , в которой $\sin x = 1 = -1$. Значит, разность $\sin x - 1$ не является бесконечно малой функцией, а потому неверно, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x = 1$.

Мы уже отмечали выше, что если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, то график функции при больших значениях x аргумента почти сливается с прямой $y = b$. В подобных случаях принято говорить, что прямая является *горизонтальной асимптотой* графика. Точнее это означает следующее: мы выбираем любое число $\varepsilon > 0$, определяющее полосу шириной 2ε , симметричную относительно прямой $y = b$ (рис. 47). Тогда найдётся такое M , что часть графика функции f , соответствующая значениям $x > M$, целиком лежит в этой полосе. Как показано на рисунке 47, при уменьшении значения ε (т. е. при сужении полосы) значение M увеличивается.

28. Другие формулировки определения предела функции при $x \rightarrow +\infty$. Мы определили понятие предела функции при

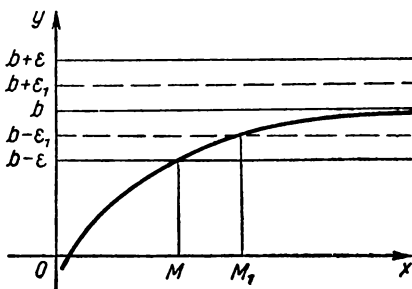


Рис. 47

$x \rightarrow +\infty$ с помощью понятия бесконечно малой функции. Во многих случаях удобно иметь непосредственное определение, не требующее сведения к более простым понятиям.

Применяя определение бесконечно малой функции к разности $f(x) - b$, получаем следующее определение предела функции f при $x \rightarrow +\infty$:

Число b является *пределом функции f при $x \rightarrow +\infty$* , если для любого $\varepsilon > 0$ существует открытый луч $]M; +\infty[$, на котором выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Вместо предложения «существует открытый луч $]M; +\infty[$, на котором выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ » будем использовать эквивалентное предложение «существует такое M , что для всех $x > M$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ ». В итоге приходим к следующему определению предела функции при $x \rightarrow +\infty$.

О п р е д е л е н и е 3.5¹. Число b является *пределом функции f при $x \rightarrow +\infty$* , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое M , что для всех $x > M$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Определение 3.5 может быть записано с помощью кванторов так:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists M) (\forall x > M) |f(x) - b| < \varepsilon,$$

или

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists M) (\forall x > M) b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon.$$

Поскольку луч $]M; +\infty[$ является полукрестностью $U^+(\infty, M)$ для ∞ , а неравенство $|x - b| < \varepsilon$ задает окрестность $U(b, \varepsilon)$ числа b , определение предела функции при $x \rightarrow +\infty$ можно сформулировать следующим образом:

О п р е д е л е н и е 4.5. Число b является *пределом функции f при $x \rightarrow +\infty$* , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое M , что

$$f(U^+(\infty, M)) \subset U(b, \varepsilon).$$

С помощью кванторов это определение записывается так:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists M) f(U^+(\infty, M)) \subset U(b, \varepsilon).$$

29. Физический смысл понятия предела функции при $x \rightarrow +\infty$. Часто встречаются физические процессы (так называемые *процессы выравнивания*), которые характеризуются тем, что при их протекании значения некоторых изменяющихся величин приближаются к постоянным. Так, например, температура остывающего тела является функцией от времени. График этой функции изображен на рисунке 48, а. Мы видим, что при увеличении t значения $f(t)$ неограниченно приближаются к температуре T_0 окружающей среды и отклонение $f(t)$ от T_0 монотонно приближается к нулю. Если бы начальная температура тела была меньше температуры окружающей среды, то происходил бы процесс нагревания и график функции $f(t)$ имел бы вид, изображенный на рисунке 48, б. В обоих случаях при больших

¹ Определение 3.5 будем называть определением «на языке ε - M », определение 2.5 — определением «на языке бесконечно малых», а определение 4.5 — определением «на языке окрестностей».

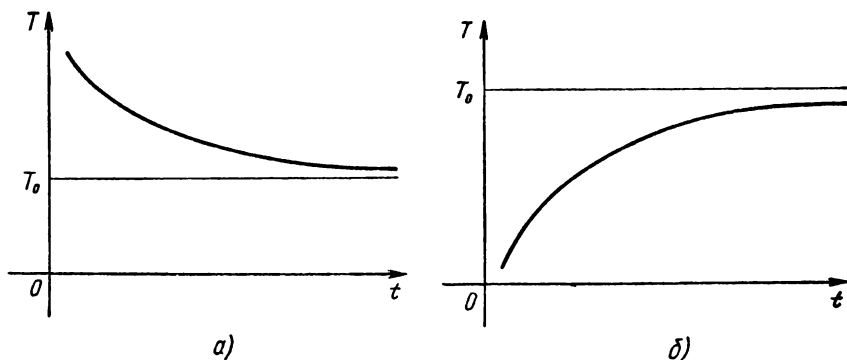


Рис. 48

значениях t этот график почти сливается с прямой $T = T_0$, и мы можем записать, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = T_0$.

Разумеется, в реальных процессах значения t не могут быть неограниченно большими. Поэтому стремление $f(t)$ к T_0 при $t \rightarrow +\infty$ — некоторая идеализация реального процесса. Физический смысл этой идеализации состоит в следующем. Как температуру тела, так и температуру окружающей его среды измеряют с помощью некоторых приборов (например, термометров). Каждый такой прибор имеет определенную чувствительность. Утверждение, что функция f стремится к T_0 при $t \rightarrow +\infty$, означает, что при любой заданной чувствительности измеряющего прибора этот прибор начиная с некоторого момента времени t_0 не покажет отклонения $f(t)$ от T_0 . Не всегда приближение функции f к предельному значению b происходит монотонно. В некоторых случаях под действием первоначального импульса значение величины сначала резко отклоняется от b , а потом начинает приближаться к b (рис. 49). Часто значения некоторой величины колеблются около предельного значения, причем размах этих колебаний все время уменьшается и приближается к ну-

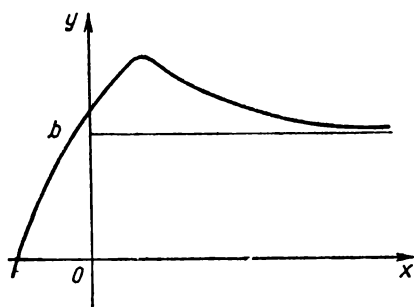


Рис. 49

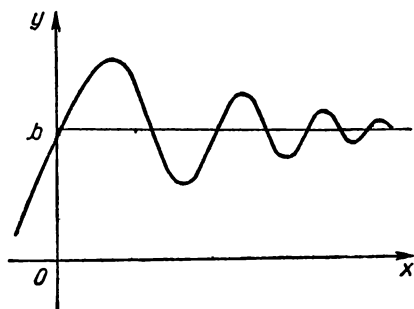


Рис. 50

лю (рис. 50); это так называемые *затухающие колебания*, при которых величина бесконечно много раз принимает предельное значение.

Поясним теперь физический смысл значений ε и M , входящих в определение предела. Число $\varepsilon > 0$ — это чувствительность измеряющего прибора, а M — тот момент времени, начиная с которого данный измеряющий прибор перестает показывать отклонение $f(t)$ от b . Иными словами, если значения физической величины $f(t)$ стремятся с течением времени к числу b , то, какой бы измеряющий прибор мы ни взяли, наступит такой момент времени M , что при $t > M$ данный прибор не будет показывать отклонения $f(t)$ от b .

Пусть $m(t)$ — масса радиоактивного вещества в момент времени t . В физике доказано, что

$$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}},$$

где m_0 — первоначальная масса радиоактивного вещества, T — число, называемое периодом полураспада. Пусть $m_0 = 1024$ г, а $T = 1$ (т. е. за единицу времени количество вещества уменьшается вдвое), и пусть чувствительность весов $\varepsilon = 1$. Тогда при $t = 10$ имеем:

$$m(10) = 1024 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 1$$

и при $t > 10$ $m(t) < 1$. Иными словами, начиная с момента времени $t = 10$ весы с чувствительностью $\varepsilon = 1$ не покажут наличия данного вещества. Если же взять более точные весы, для которых $\varepsilon = 0,01$, то они перестанут показывать наличие вещества лишь с момента времени $t \approx 17$.

30. Свойства пределов функций при $x \rightarrow +\infty$. В этом пункте мы докажем некоторые свойства пределов функций.

Т е о р е м а 6.5. *Функция f не может иметь двух различных пределов при $x \rightarrow +\infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$. В соответствии с определением «на языке бесконечно малых»

$$f = a + \alpha = b + \beta,$$

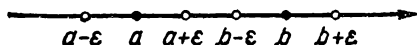
где функции α и β бесконечно малы при $x \rightarrow +\infty$. Из $a + \alpha = b + \beta$ получаем $a - b = \beta - \alpha$. Поскольку функция $\beta - \alpha$ бесконечно мала, а функция $a - b$ постоянна, то по теореме 1.5 из п. 26 имеем $a - b = 0$, т. е. $a = b$.

Т е о р е м а 7.5. *Если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = b$ и $a < b$, то найдется луч $]M; +\infty[$, на котором выполняется неравенство $f(x) < g(x)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся определением «на языке ε - M ». Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $a + \varepsilon < b - \varepsilon$ (рис. 51). По условию $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$. Это значит, что

$$(\exists M_1)(\forall x > M_1) a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon.$$

Далее, по условию $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = b$.



Это значит, что

Рис. 51

$$(\exists M_2)(\forall x > M_2) b - \varepsilon < g(x) < b + \varepsilon.$$

Положим $M = \max(M_1, M_2)$. Тогда на луче $]M; +\infty[$ будут выполняться одновременно оба двойных неравенства:

$$\begin{cases} a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon, \\ b - \varepsilon < g(x) < b + \varepsilon. \end{cases}$$

Кроме того, $a + \varepsilon < b - \varepsilon$. В итоге получаем:

$$f(x) < a + \varepsilon < b - \varepsilon < g(x),$$

т. е. на луче $]M; +\infty[$ выполняется неравенство $f(x) < g(x)$.

С л е д с т в и е 1. Если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ и $a < b$, то найдется луч $]M; +\infty[$, на котором выполняется неравенство $f(x) < b$.

В самом деле, рассмотрим постоянную функцию g , где $g(x) = b$. Так как $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = b$, то по теореме 7.5 получаем, что существует луч $]M; +\infty[$, на котором выполняется неравенство $f(x) < g(x)$, т. е. $f(x) < b$.

Аналогично доказывается

С л е д с т в и е 2. Если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ и $c < a$, то существует луч $]M; +\infty[$, на котором выполняется неравенство $f(x) > c$.

Т е о р е м а 8.5. Если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = b$ и существует луч $]M_1; +\infty[$, на котором выполняется неравенство $f(x) \leq g(x)$, то $a \leq b$.

Д о к а з а т е л ь с т в о (от противного). Предположим, что $a > b$. Тогда по теореме 7.5 найдется луч $]M_2; +\infty[$, на котором выполняется неравенство $f(x) > g(x)$. Но тогда на луче $]M_1; +\infty[\cap]M_2; +\infty[$ должны выполняться оба неравенства $f(x) \leq g(x)$ и $f(x) > g(x)$, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что $a \leq b$.

Доказанную теорему иногда называют *теоремой о предельном переходе под знаком неравенства*. Коротко эту теорему можно записать так:

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x).$$

Обращаем внимание читателя на то, что такой предельный переход возможен (при выполнении условий теоремы) только под знаком нестрогого неравенства. Если, например, $f(x) = -\frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$, то при $x > 0$ имеем $f(x) < g(x)$; в то же время $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

$= 0$. Значит, в данном случае $f(x) < g(x)$, но $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

Теорема 9.5 (о пределе промежуточной функции). Если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = b$ и существует луч $]M_0; +\infty[$, на котором выполняются неравенства $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = b$.

Доказательство. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, то

$$(\exists M_1) (\forall x > M_1) \quad b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon.$$

Так как $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = b$, то

$$(\exists M_2) (\forall x > M_2) \quad b - \varepsilon < g(x) < b + \varepsilon.$$

Наконец, из условия следует, что при $x > M_0$ выполняется двойное неравенство $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$.

Выберем $M = \max(M_0, M_1, M_2)$. Тогда при $x > M$ выполняются одновременно три двойных неравенства:

$$\begin{cases} b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon, \\ b - \varepsilon < g(x) < b + \varepsilon, \\ f(x) \leq h(x) \leq g(x). \end{cases}$$

Отсюда получаем $b - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < b + \varepsilon$, т. е. $b - \varepsilon < h(x) < b + \varepsilon$.

Итак, для произвольно взятого числа $\varepsilon > 0$ нашлось такое M , что при $x > M$ выполняется неравенство $b - \varepsilon < h(x) < b + \varepsilon$. Это и означает «на языке ε - M », что $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = b$.

Теорема 10.5. Если функция f имеет предел при $x \rightarrow +\infty$, то существует луч $]M; +\infty[$, на котором функция f ограничена.

Доказательство. Пусть $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такое M , что на луче $]M; +\infty[$ выполняется неравенство

$$b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon.$$

Это и означает ограниченность функции f на луче $]M; +\infty[$.

Теорема 11.5. Если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ и $b \neq 0$, то существует луч $]M; +\infty[$, на котором функция $\frac{1}{f}$ ограничена.

Доказательство. Для определенности будем считать, что $b > 0$. Выберем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы оно было меньше b : $0 < \varepsilon < b$. Тогда найдется луч $]M; +\infty[$, на котором выполняется неравенство $0 < b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$. Здесь $b - \varepsilon$ и $b + \varepsilon$ — положительные числа, а потому имеем:

$$\frac{1}{b + \varepsilon} < \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{b - \varepsilon}.$$

Полученное двойное неравенство означает ограниченность функции $\frac{1}{f}$ на $]M; +\infty[$.

31. Предел функции при $x \rightarrow -\infty$ и при $x \rightarrow \infty$. Определим понятия предела функции при $x \rightarrow -\infty$ и при $x \rightarrow \infty$.

О п р е д е л е н и е 5. 5. Число b является *пределом функции f при $x \rightarrow -\infty$* , если $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$. В этом случае пишут $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$.

Если и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, и $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, то говорят, что число b является *пределом функции f при $x \rightarrow \infty$* , и пишут $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$.

П р и м е р 13. Докажем, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0, n \in \mathbb{N}$.

Решение. Выше было показано, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$. Но при четном n имеем $\frac{1}{(-x)^n} = \frac{1}{x^n}$, а при нечетном n имеем $\frac{1}{(-x)^n} = -\frac{1}{x^n}$, и потому

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(-x)^n} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0, & \text{если } n \text{ четно,} \\ -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Значит,

$$\text{и потому } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0,$$

Если $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, то прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции f при $x \rightarrow -\infty$ (рис. 52). Аналогично если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$, то прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции f как при $x \rightarrow +\infty$, так и при $x \rightarrow -\infty$ (рис. 53).

Выше было отмечено, что утверждения $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0$ и «функция α бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$ » равносильны. Поэтому мы будем называть функцию α *бесконечно малой при $x \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow \infty$)*, если $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha(x) = 0$ ($\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$). Справедливо утверждение: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ тогда и только тогда, когда функция $f(x) - b$ бесконечно мала при $x \rightarrow -\infty$.

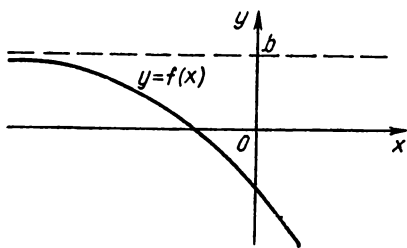


Рис. 52

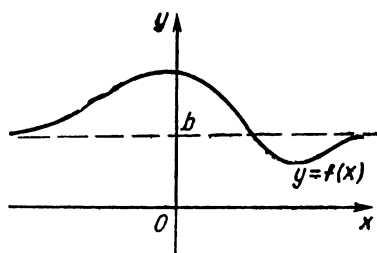


Рис. 53

По аналогии с тем, как это было сделано в п. 28, можно сформулировать определение предела функции при $x \rightarrow -\infty$ и при $x \rightarrow \infty$ «на языке ε - M » и «на языке окрестностей».

О п р е д е л е н и е 6.5. Число b является *пределом функции* f при $x \rightarrow -\infty$, если

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists M) (\forall x < M) |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Число b является *пределом функции* f при $x \rightarrow \infty$, если

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists M > 0) (\forall x, |x| > M) |f(x) - b| < \varepsilon.$$

О п р е д е л е н и е 7.5. Число b является *пределом функции* f при $x \rightarrow -\infty$, если

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists M > 0) f(U^-(\infty, M)) \subset U(b, \varepsilon).$$

Число b является *пределом функции* f при $x \rightarrow \infty$, если

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists M > 0) f(U(\infty, M)) \subset U(b, \varepsilon).$$

Напомним, что $U^-(\infty, M) =]-\infty; -M[$, а $U(\infty, M) = U^+(\infty, M) \cup U^-(\infty, M) =]M; +\infty[\cup]-\infty; -M[$.

Для пределов функций при $x \rightarrow -\infty$ и при $x \rightarrow \infty$ справедливы аналогии теорем из п. 30¹:

1. Если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$, то $a = b$.

2. Если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = b$ и $a < b$, то существует окрестность $U(\infty, M)$, в которой выполняется неравенство $f(x) < g(x)$.

3. Если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = b$ и в некоторой окрестности $U(\infty, M)$ выполняется неравенство $f(x) \leq g(x)$, то $a \leq b$.

4. Если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = b$ и существует окрестность $U(\infty, M)$, в которой выполняется двойное неравенство $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = b$.

5. Если существует $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$, то в некоторой окрестности $U(\infty, M)$ функция f ограничена.

6. Если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \neq 0$, то в некоторой окрестности $U(\infty, M)$ функция $\frac{1}{f}$ ограничена.

32. Теорема о пределе монотонной ограниченной функции. Из теоремы 10.5 п. 30 вытекает, что для существования предела $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ необходимо, чтобы функция f была ограничена на некотором луче

¹ При этом, если $x \rightarrow \infty$, луч $]M; +\infty[$, который использовался в формулировках теорем 7.5 — 11.5 для случая, когда $x \rightarrow +\infty$, заменяется объединением двух лучей $] -M; -\infty[$ и $]M; +\infty[$, т. е. окрестностью «точки» ∞ .

$]M; +\infty[$. Это необходимое условие не является, однако, достаточным. Например, функция $\sin x$ ограничена, но не имеет предела при $x \rightarrow +\infty$. Достаточное условие существования предела дается следующей теоремой:

Т е о р е м а 12.5. *Если существует луч $]M_1; +\infty[$, на котором функция f ограничена сверху и не убывает, то существует предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . По условию множество Y значений функции f на $]M_1; +\infty[$ ограничено сверху. В силу теоремы 6.2 из п. 12 отсюда следует, что это множество имеет точную верхнюю грань, т. е. существует число $b = \sup_{x \in]M_1; +\infty[} f(x)$. Докажем, что это число является пределом функции f при $x \rightarrow +\infty$.

Зададим число $\varepsilon > 0$. Так как $b - \varepsilon < b$, то $b - \varepsilon$ не является верхней гранью для f , и потому найдется такое число M , что $M > M_1$ и $f(M) > b - \varepsilon$. Поскольку функция f является неубывающей на $]M_1; +\infty[$, а $M > M_1$, то для любого $x > M$ имеем $f(x) \geq f(M) > b - \varepsilon$. С другой стороны, так как $b = \sup_{x \in]M_1; +\infty[} f(x)$, то $f(x) \leq b$. Итак, для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое M , что на $]M; +\infty[$ выполняется неравенство $b - \varepsilon < f(x) \leq b$. Это и значит, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$.

Точно так же доказывается

Т е о р е м а 13.5. *Если существует луч $]M_1; +\infty[$, на котором функция f не возрастает и ограничена снизу, то существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, причем он равен $\inf_{x \in]M_1; +\infty[} f(x)$.*

Аналогичные теоремы имеют место и при $x \rightarrow -\infty$.

Из теоремы 12.5 вытекает, например, существование предела $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1}$. В самом деле, функция $\frac{x^2}{x^2 + 1} = 1 - \frac{1}{x^2 + 1}$ возрастает на луче $[0; +\infty[$ и ограничена на нем.

33. Бесконечно большие функции и их свойства. Функция x^3 обладает тем свойством, что по мере возрастания x ее значения неограниченно увеличиваются. Поскольку знаменатель дроби $\frac{1}{x^3}$ безгранично возрастает при $x \rightarrow +\infty$, то сама дробь является бесконечно малой при $x \rightarrow +\infty$.

О п р е д е л е н и е 8.5. Функция f называется *бесконечно большой* при $x \rightarrow +\infty$, если $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$. В этом случае говорят также, что функция f бесконечно велика при $x \rightarrow +\infty$. Пишут $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$.

Вспомним определение бесконечно малых функций на «языке ε - M » и заменим в этом определении ε дробью $\frac{1}{P}$. Кроме того, примем во внимание, что неравенства $\left| \frac{1}{f(x)} \right| < \frac{1}{P}$ и $|f(x)| > P$ равносильны.

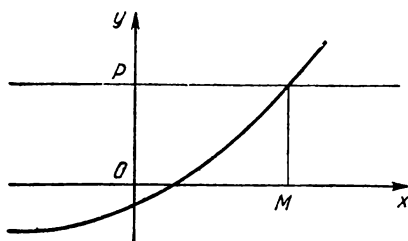


Рис. 54

Мы приходим к следующему определению бесконечно большой функции:

О п р е д е л е н и е 8.5'. Функция f называется *бесконечно большой* при $x \rightarrow +\infty$, если для любого $P > 0$ найдется луч $]M; +\infty[$, на котором выполняется неравенство $|f(x)| > P$.

На языке кванторов это определение записывается следующим образом:

$$(\forall P > 0) (\exists M) (\forall x > M) |f(x)| > P.$$

Геометрически оно означает, что какую бы полосу, ограниченную прямыми $y = -P$ и $y = P$, мы ни взяли, найдется луч $]M; +\infty[$, на котором график функции f лежит вне этой полосы.

Если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$, причем функция f положительна на некотором луче $]M; +\infty[$, то говорят, что эта функция стремится к $+\infty$, когда x стремится к $+\infty$, и пишут $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. В этом случае в определении 8.5' надо заменить неравенство $|f(x)| > P$ на $f(x) > P$:

$$(\forall P > 0) (\exists M) (\forall x > M) f(x) > P.$$

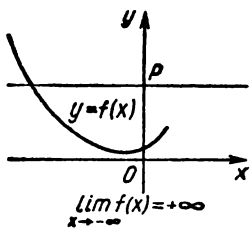
Это означает, что для любого $P > 0$ найдется луч $]M; +\infty[$, на котором график функции f расположен выше прямой $y = P$ (рис. 54).

Аналогично определяется смысл записей

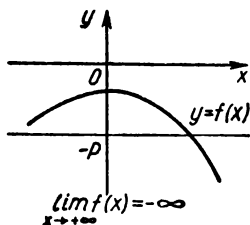
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

и т. д. (рис. 55, а — в).

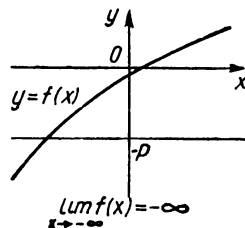
Например, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ означает, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, причем существует такое M , что $f(x) > 0$ при $|x| > M$. Предоставляем читателю дать определения указанных понятий «на языке ε - M » и на «языке окрестностей».



а)



б)



в)

Рис. 55

Следует различать понятия неограниченной и бесконечно большой функций. С помощью кванторов могут быть даны следующие определения: неограниченной функции

$$(\forall P > 0) (\exists x) |f(x)| > P$$

и бесконечно большой функции

$$(\forall P > 0) (\exists M) (\forall x > M) |f(x)| > P.$$

Таким образом, если функция f не ограничена, то для любого $P > 0$ найдется значение функции $f(M)$, большее по модулю, чем P . Но среди значений f при $x > M$ могут оказаться и такие, что $|f(x)| < P$. А если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$, то для любого $P > 0$ найдется такое M , что для всех $x > M$ имеем $|f(x)| > P$. Таким образом, всякая бесконечно большая функция не ограничена, но не всякая неограниченная функция бесконечно велика.

Например, функция f , где $f(x) = x \cos x$, не ограничена на $[0; +\infty[$: если $n \in \mathbb{N}$, то $f(2\pi n) = 2\pi n \cos 2\pi n = 2\pi n$. Но в то же время $f\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 0$. Это показывает, что после больших по модулю значений функция принимает и значения, равные нулю. Поэтому она не является бесконечно большой при $x \rightarrow +\infty$.

Для бесконечно больших функций справедливы теоремы, аналогичные теоремам о бесконечно малых функциях.

Теорема 14.5. Сумма двух бесконечно больших функций одного и того же знака является бесконечно большой функцией того же знака.

Теорема 15.5. Сумма бесконечно большой функции и ограниченной функции — бесконечно большая функция.

Теорема 16.5. Произведение бесконечно большой функции на функцию, имеющую отличный от нуля предел, — бесконечно большая функция.

Теорема 17.5. Произведение двух бесконечно больших функций — бесконечно большая функция.

Докажем, например, теорему 14.5. Пусть $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. Тогда функции $\frac{1}{f}$ и $\frac{1}{g}$ бесконечно малы при $x \rightarrow +\infty$. При этом, поскольку f и g положительны на некотором луче $]M; +\infty[$, на этом луче $f(x) + g(x) > f(x)$, и потому $0 < \frac{1}{f(x) + g(x)} < \frac{1}{f(x)}$. Отсюда следует, что функция $\frac{1}{f+g}$ бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$, а потому функция $f + g$ бесконечно велика при $x \rightarrow +\infty$. Аналогично доказываются остальные теоремы.

Из этих теорем вытекает следующее утверждение:

С л е д с т в и е. Любой многочлен

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

является бесконечно большой функцией при $x \rightarrow \infty$.

В самом деле, $\frac{1}{x^n}$ — бесконечно малая при $x \rightarrow \infty$, а потому x^n — бесконечно большая. Далее, имеем:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right).$$

Но слагаемые $\frac{a_{n-1}}{x}, \dots, \frac{a_0}{x^n}$ бесконечно малы при $x \rightarrow \infty$, и потому

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right) = a_n \neq 0.$$

Значит, $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ — произведение бесконечно большой функции x^n и функции, имеющей конечный предел, отличный от нуля. В силу теоремы 16.5 получаем, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (a_n x^n + \dots + a_0) = \infty.$$

Это утверждение нельзя было доказывать, исходя из теоремы 14.5: дело в том, что различные слагаемые многочлена могут иметь различные знаки, а теорема 14.5 касается лишь суммы бесконечно больших функций одного и то же знака. Из проведенного доказательства видно, что при достаточно больших значениях $|x|$ знак многочлена определяется знаком его старшего члена.

Вопросы для самопроверки

1. Какая функция называется бесконечно малой при $x \rightarrow +\infty$? при $x \rightarrow -\infty$? при $x \rightarrow \infty$?

2. Приведите пример функции, бесконечно малой при $x \rightarrow +\infty$, но не являющейся бесконечно малой при $x \rightarrow -\infty$; бесконечно малой при $x \rightarrow -\infty$, но не являющейся бесконечно малой при $x \rightarrow +\infty$.

3. Может ли постоянная функция быть бесконечно малой? В каком случае?

4. Сформулируйте теорему о сравнении с бесконечно малой функцией.

5. Перечислите свойства бесконечно малых функций.

6. Если функция $f + g$ бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$, то означает ли это, что f и g бесконечно малы? Верно ли обратное утверждение?

7. Сформулируйте определение предела функции f при $x \rightarrow +\infty$ «на языке бесконечно малых».

8. Сформулируйте определение предела функции f «на языке ε - M »: при $x \rightarrow +\infty$; при $x \rightarrow -\infty$; при $x \rightarrow \infty$.

9. Пусть доказано, что, начиная с некоторого значения M , выполняется неравенство $|f(x) - b| < \frac{1}{10^{100}}$. Следует ли отсюда, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$?

10. Приведите пример функции, имеющей при $x \rightarrow +\infty$ своим пределом число 1; -1 ; 0; 5

11. В чем состоит физический смысл предела функции при $x \rightarrow +\infty$? В чем состоит физический смысл чисел ε и M в определении предела функции при $x \rightarrow +\infty$?

12. В чем состоит геометрический смысл равенства $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$; $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$? Сделайте соответствующие рисунки.

13. Перечислите свойства пределов функций при $x \rightarrow +\infty$.

14. Сформулируйте и докажите теоремы из п. 30 для случая, когда $x \rightarrow -\infty$.

15. В каком случае говорят, что число b не является пределом функции f при $x \rightarrow +\infty$? Запишите это утверждение с помощью кванторов.

16. Сформулируйте определение предела функции «на языке окрестностей» при $x \rightarrow +\infty$; при $x \rightarrow -\infty$; при $x \rightarrow \infty$.

17. Верно ли утверждение: если функция f ограничена на луче $[M; +\infty[$, то она имеет предел при $x \rightarrow +\infty$? Верна ли обратная теорема?

18. Какая функция называется бесконечно большой при $x \rightarrow +\infty$? при $x \rightarrow -\infty$? при $x \rightarrow \infty$?

19. Приведите пример функции, бесконечно большой при $x \rightarrow +\infty$, но не являющейся бесконечно большой при $x \rightarrow -\infty$; бесконечно большой при $x \rightarrow -\infty$, но не являющейся бесконечно большой при $x \rightarrow +\infty$; бесконечно большой при

$x \rightarrow \infty$; не являющейся бесконечно большой ни при $x \rightarrow +\infty$, ни при $x \rightarrow -\infty$.
 20. Какая связь имеется между бесконечно большой и бесконечно малой функциями при $x \rightarrow \infty$?

21. Запишите с помощью кванторов, что означают утверждения:

- а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$; в) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$;
 г) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$; е) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$.

Сделайте соответствующие рисунки.

22. Запишите с помощью кванторов отрицание утверждений:

- а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$;
 в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$; г) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$;
 д) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$.

23. Всякая ли бесконечно большая функция является неограниченной? А всякая ли неограниченная функция является бесконечно большой?

Упражнения

104. Докажите, что если функция α бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$, то функции
 а) $2\alpha^2(x) + \alpha(x) \cdot \sin 4x$; б) $|\alpha(x)|$; в) $\alpha^3(x) + 5\alpha(x)$ бесконечно малы при $x \rightarrow +\infty$.

105. Докажите, что следующие функции бесконечно малы при $x \rightarrow +\infty$:

- а) $\frac{1}{x^4 + 1}$; б) $\frac{6x^3 - 3x^2 + \sqrt{x} + 1}{x^5}$; в) $\frac{\sin^2 x + 3 \cos 2x}{x^4}$; г) $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

106. Докажите, что если функции α и β бесконечно малы при $x \rightarrow +\infty$, то:

- а) функция $|\alpha| + |\beta|$ бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$;
 б) функция γ , где $\gamma(x) = \max(\alpha(x), \beta(x))$, бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$.

107. а) Исходя из определения предела, докажите, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 9} = 1$.

б) Найдите значение M , такое, что при $x > M$ выполняется неравенство
 $\left| \frac{x^2 + 1}{x^2 + 9} - 1 \right| < \frac{1}{1000}$.

108. Докажите равенства:

- а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{x + 2} = 2$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 3}{3x + 1} = \frac{1}{3}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 + 6x + 1}{3x^4} = \frac{8}{3}$; г) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^3 + 16} - x) = 0$;
 д) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0$; е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + \cos x}{x^3} = 2$;
 ж) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 9} + x) = 0$.

109. а) Докажите, что число $b = 0$ не является пределом функции $\cos x$ при $x \rightarrow +\infty$.

б) Докажите, что никакое число b не является пределом функции $\cos x$ при $x \rightarrow +\infty$ (т. е. докажите, что эта функция не имеет предела при $x \rightarrow +\infty$).

110. Докажите, что никакое число b не является пределом функции x^3 : а) при $x \rightarrow +\infty$; б) при $x \rightarrow -\infty$; в) при $x \rightarrow \infty$.

111. а) Студент сформулировал определение предела функции f при $x \rightarrow +\infty$ так: «... найдется такое $\varepsilon > 0$, что для всех x выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ ». Покажите, что при таком «определении» любая ограниченная функция (в том числе и $\cos x$) имеет предел при $x \rightarrow +\infty$.

б) Студент сформулировал определение предела функции f при $x \rightarrow +\infty$ так: «... для любых $\varepsilon > 0$ и M найдется такое $x > M$, что $|f(x) - b| < \varepsilon$ ». Покажите, что при таком «определении» предел функции $\cos x$ при $x \rightarrow +\infty$ может равняться любому числу от -1 до 1 .

112. В чем ошибочно следующее «определение» предела функции f при $x \rightarrow +\infty$: «... для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое M , что для всех $x > M$ выполняется неравенство $f(x) - b < \varepsilon$ »?

113. Постройте график такой функции f , что:

а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ (функция возрастает на всей числовой прямой);

б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$;

в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, а при $x \rightarrow -\infty$ функция неограниченно возрастает;

г) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$, а при $x \rightarrow +\infty$ функция колеблется от -1 до 1 ;

д) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, но $f(x) < 1$ для всех x .

114. а) Найдите приближенное значение функции $\frac{2x^4 + 1}{x^4 + 1}$ при $x = 10,156$ и $x = -12,367$. Покажите, что допущенная ошибка не превосходит $0,0001$.

б) Оцените ошибку при $x = 3647,105$.

115. а) Докажите, что имеют место равенства:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 9}{x^3 + 4} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 8}{2x^3 + 3} = \frac{1}{2}.$$

б) Сравните значения функций $\frac{x^3 + 9}{x^3 + 4}$ и $\frac{x^3 + 8}{2x^3 + 3}$ при достаточно больших значениях x . Найдите такое $M > 0$, что при $x > M$ выполняется неравенство

$$\frac{x^3 + 9}{x^3 + 4} > \frac{x^3 + 8}{2x^3 + 3}.$$

116. Докажите, что функция $x \sin \pi x$ является неограниченной на $[0; +\infty[$, но не является бесконечно большой при $x \rightarrow +\infty$.

117. Докажите, что функция f является бесконечно большой при $x \rightarrow \infty$, если:

а) $f(x) = 2x^3 - 5x + 3$; б) $f(x) = x \sqrt{x^3 + 16}$; в) $f(x) = x^2(2 + \sin x)$.

§ 6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИЙ ПРИ $x \rightarrow \infty$

34. Вычисление предела суммы, произведения и частного. Если при $x \rightarrow +\infty$ значения функции f неограниченно приближаются к числу a , а значения функции g — к числу b , то значения их суммы $f + g$ приближаются к $a + b$, а значения произведения fg — к числу ab . Если при этом $b \neq 0$, то значения $\frac{f}{g}$ приближаются к $\frac{a}{b}$. Иными словами, справедливы следующие теоремы:

Теорема 1.6. Пусть функции f и g имеют пределы при $x \rightarrow +\infty$. Тогда их сумма $f + g$ имеет предел при $x \rightarrow +\infty$, равный сумме пределов слагаемых:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x).$$

Доказательство. Пусть $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = b$. Тогда $f = a + \alpha$, $g = b + \beta$, где функции α и β бесконечно малы при $x \rightarrow +\infty$. Но тогда

$$f + g = (a + \alpha) + (b + \beta) = (a + b) + (\alpha + \beta).$$

Функция $\alpha + \beta$ бесконечно мала как сумма бесконечно малых, а потому функция $f + g$ является суммой числа $a + b$ и бесконечно малой функции $\alpha + \beta$. Это означает, что предел $f + g$ при $x \rightarrow +\infty$ равен $a + b$, т. е. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = a + b$.

Теорема 2.6. Пусть функции f и g имеют пределы при $x \rightarrow +\infty$. Тогда их произведение fg имеет предел при $x \rightarrow +\infty$, который равен произведению пределов множителей:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x).$$

Доказательство. При тех же обозначениях, что и в теореме 1.6, получаем: $fg = (a + \alpha)(b + \beta) = ab + (a\beta + \alpha b + \alpha\beta)$.

Так как $a\beta + \alpha b + \alpha\beta$ бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) g(x) = ab$.

Следствие. Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

Доказательство. Так как $\lim_{x \rightarrow +\infty} c = c$ (см. теорему 5.5), то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} cf(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} c \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

Теорема 3.6. Если $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = b$, $b \neq 0$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b}$.

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot (b - g(x)). \quad (1)$$

Так как по условию $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = b \neq 0$, то по теореме 11.5 из п. 30 функция $\frac{1}{g}$ ограничена на некотором луче. Кроме того, по определению предела функция $b - g$ бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$. Значит, функция в правой части равенства (1) бесконечно мала, а потому

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b}.$$

Следствие. Если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = b \neq 0$,

$$\text{то } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}.$$

Доказательство. Мы имеем:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{g(x)} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}.$$

Аналогичные теоремы справедливы для случая, когда $x \rightarrow -\infty$ или $x \rightarrow \infty$.

Доказанные теоремы позволяют вычислять пределы многих функций.

Пример 1. Вычислим предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 6x - 1}{x^2 + 4}$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель на x^3 и учтем, что $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x^2}$ — бесконечно малые функции. По теоремам о пределах получаем:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 6x - 1}{x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{6}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{4}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{6}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x^2} \right)} = \frac{2}{1} = 2.$$

35. Вычисление предела отношения двух многочленов при $x \rightarrow \infty$.

В этом пункте мы вычислим $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$, $Q(x)$ — многочлены.

Здесь могут представиться три случая: степень многочлена $P(x)$ равна, меньше или больше степени многочлена $Q(x)$.

Докажем, что если $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0} = \frac{a_n}{b_n}, \quad (2)$$

а если $m < n$, $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0} = 0. \quad (3)$$

Непосредственно вычислить пределы (2) и (3) по теоремам 1.6—3.6 невозможно, так как числитель и знаменатель дроби не имеют пределов при $x \rightarrow \infty$. Но значение дроби не изменится, если разделить числитель и знаменатель на x^n , а тогда получатся выражения, имеющие предел при $x \rightarrow \infty$. Итак,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \dots + \frac{b_0}{x^n}} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \dots + \frac{b_0}{x^n} \right)}. \end{aligned}$$

Поскольку функции $\frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}$ и $\frac{b_{n-1}}{x} + \dots + \frac{b_0}{x^n}$ бесконечно малы при $x \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right) = a_n,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \dots + \frac{b_0}{x^n} \right) = b_n.$$

Значит,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_n x^n + \dots + b_0} = \frac{a_n}{b_n}.$$

Равенство (3) доказывается аналогично: после деления числителя и знаменателя на x^n получаем в числителе сумму бесконечно малых функций, а в знаменателе — сумму числа b_n и бесконечно малых функций. Поэтому предел дроби равен $\frac{0}{b_n}$, т. е. равен нулю.

Теперь докажем, что если $m > n$, то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_m x^m + \dots + a_0}{b_n x^n + \dots + b_0} = \infty. \quad (4)$$

Мы уже доказали, что при $n < m$ имеем:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b_n x^n + \dots + b_0}{a_m x^m + \dots + a_0} = 0.$$

По определению 8.5 из п. 33 это и значит, что справедлива запись (4).

Тем самым доказана следующая теорема:

Т е о р е м а 4.6. Пусть

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$, где $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \frac{a_m}{b_n}, & \text{если } m = n; \\ 0, & \text{если } m < n; \\ \infty, & \text{если } m > n. \end{cases}$$

Например, имеем:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 3x^2 + x - 1}{3x^3 + 2x^2 - 1} = \frac{4}{3} \quad (\text{степень числителя равна степени знаменателя});$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 3x^2 + x - 1}{x^5 + 1} = 0 \quad (\text{степень числителя меньше степени знаменателя});$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 3x^2 + x - 1}{2x^2 + x + 1} = \infty \quad (\text{степень числителя больше степени знаменателя}).$$

З а м е ч а н и е. Равенство (4) можно уточнить, если известно, что $x \rightarrow +\infty$ или что $x \rightarrow -\infty$. В первом случае знак бесконечности совпадает со знаком $\frac{a_m}{b_n}$, а во втором — со знаком $(-1)^{m-n} \cdot \frac{a_m}{b_n}$.

Например, так как $-\frac{2}{3} < 0$, а $(-1)^{3-2} \left(-\frac{2}{3} \right) > 0$, имеем:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3 + x + 7}{3x^3 - 6} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3 + x + 7}{3x^3 - 6} = +\infty.$$

36. Вычисление предела корня. Докажем, что если

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b > 0, \quad \text{то} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{b}.$$

Мы имеем:

$$\begin{aligned} |\sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{b}| &= \frac{|(\sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{f(x)} + \sqrt[n]{b})|}{\sqrt[n]{f(x)} + \sqrt[n]{b}} = \\ &= \frac{|f(x) - b|}{\sqrt[n]{f(x)} + \sqrt[n]{b}} < \frac{|f(x) - b|}{\sqrt[n]{b}}. \end{aligned}$$

Так как функция $f(x) - b$ бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$, то и функция $\sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{b}$ бесконечно мала, т. е. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{b}$.

Этот результат является частным случаем более общей теоремы.

Т е о р е м а 5.6. Если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b > 0$, то для любого $n \in \mathbb{N}$,

$$n > 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{b}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся формулой

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Мы имеем:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{b} &= \\ &= \frac{(\sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{f(x)}^{n-1} + \sqrt[n]{f(x)}^{n-2} \cdot \sqrt[n]{b} + \dots + (\sqrt[n]{b})^{n-1})}{(\sqrt[n]{f(x)})^{n-1} + (\sqrt[n]{f(x)})^{n-2} \cdot \sqrt[n]{b} + \dots + (\sqrt[n]{b})^{n-1}} = \\ &= \frac{f(x) - b}{(\sqrt[n]{f(x)})^{n-1} + (\sqrt[n]{f(x)})^{n-2} \cdot \sqrt[n]{b} + \dots + (\sqrt[n]{b})^{n-1}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку $b > 0$, то по следствию 2 из теоремы 7.5 п. 30 найдется луч $]M; +\infty[$, на котором $f(x) > 0$. На этом луче выполняется неравенство

$$(\sqrt[n]{f(x)})^{n-1} + (\sqrt[n]{f(x)})^{n-2} \cdot \sqrt[n]{b} + \dots + (\sqrt[n]{b})^{n-1} > (\sqrt[n]{b})^{n-1}.$$

Из этого неравенства и из равенства (5) выводим, что

$$|\sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{b}| < \frac{|f(x) - b|}{\sqrt[n]{b}^{n-1}}. \quad (6)$$

Так как функция $f - b$ бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$, то из неравенства (6) следует, что и функция $\sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{b}$ бесконечно мала, а потому

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{b}.$$

Аналогичная теорема справедлива в случае, когда $x \rightarrow -\infty$ и $x \rightarrow \infty$.

Пример 2. Вычислим предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 16x^2 + 1} + 3x^2}{x^2 + 5}$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель на x^2 . Получим:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{16}{x^2} + \frac{1}{x^4}} + 3}{1 + \frac{5}{x^2}} = \frac{1+3}{1} = 4.$$

Пример 3. Вычислим предел $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x)$.

Решение. Непосредственное применение теорем о пределах невозможно, так как $\sqrt{x^2 + x}$ и x при $x \rightarrow -\infty$ — бесконечно большие функции различных знаков. Для вычисления предела умножим числитель и знаменатель на выражение $\sqrt{x^2 + x} - x$, сопряженное с $\sqrt{x^2 + x} + x$. Получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} + x)(\sqrt{x^2 + x} - x)}{\sqrt{x^2 + x} - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 + x) - x^2}{\sqrt{x^2 + x} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} - 1}. \end{aligned}$$

В данном случае $x < 0$, поэтому $\frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = -\sqrt{\frac{x^2 + x}{x^2}} = -\sqrt{1 + \frac{1}{x}}$, а потому $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = -1$. В итоге получаем, что

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} - 1} = \frac{1}{-1 - 1} = -\frac{1}{2}.$$

37. Асимптоты. Если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, то, как мы отмечали в п. 27,

прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой для графика функции f : расстояние от точки $M(x; f(x))$ этого графика до прямой $y = b$ стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$.

Если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$, то у графика функции f нет горизонтальной асимптоты при $x \rightarrow +\infty$, но может быть наклонная асимптота, т. е. такая прямая $y = kx + b$, что расстояние от точки $M(x; f(x))$ графика функции f до этой прямой стремится к нулю, когда $x \rightarrow +\infty$.

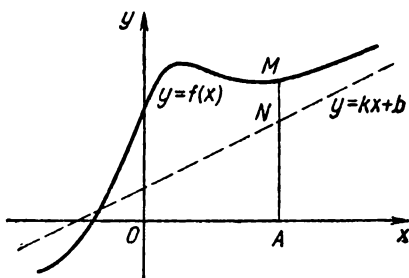


Рис. 56

В этом случае стремится к нулю и расстояние от графика до асимптоты, измеренное по направлению, параллельному оси ординат (рис. 56). Так как

$$|MN| = |y_{кр.} - y_{кас}| = |f(x) - kx - b|,$$

то для нахождения наклонных асимптот надо решить следующую задачу:

Найти такие значения k и b , что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x) - kx - b| = 0. \quad (7)$$

Вынесем $|x|$ за знак модуля:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |x| \cdot \left| \frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right| = 0. \quad (8)$$

Так как $\lim_{x \rightarrow +\infty} |x| = +\infty$, то для выполнения равенства (7) необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right) = 0,$$

или, что то же самое, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$.

Итак, если график функции f имеет наклонную асимптоту при $x \rightarrow +\infty$, то угловой коэффициент этой асимптоты выражается формулой

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}. \quad (9)$$

Далее, если выполняется равенство (7), то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b. \quad (10)$$

Равенство (10) определяет начальную ординату асимптоты.

Справедливо и обратное утверждение: *если существуют пределы (9) и (10), то прямая $y = kx + b$ является асимптотой для графика функции f при $x \rightarrow +\infty$.*

Аналогично ищут асимптоты при $x \rightarrow -\infty$, при $x \rightarrow \infty$.

Пример 4. Найдем асимптоты графика функции $\frac{x^3 - 6x^2 + 3}{2x^3 + 5}$.

Решение. Мы имеем:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 3}{x(2x^3 + 5)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 3}{2x^3 + 5x} = \frac{1}{2};$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - 6x^2 + 3}{2x^3 + 5} - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-12x^2 - 5x + 6}{4x^3 + 10} = -3.$$

Значит, наклонной асимптотой служит прямая $y = \frac{x}{2} - 3$. Она является наклонной асимптотой и при $x \rightarrow +\infty$, и при $x \rightarrow -\infty$.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте теоремы об арифметических операциях над пределами функций.

2. Следует ли из существования предела $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = c$ существование пределов $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ (рассмотрите пример: $f(x) = \sin x + \frac{1}{x}$, $g(x) = -\sin x$)?

3. Следует ли из существования предела $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot g(x) = a$ существование пределов $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$?

4. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены. В каком случае $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$? В каком случае $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \infty$? Чему равен этот предел в случае, когда $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены одной и той же степени?

5. Что такое асимптота графика функции?

6. В каком случае график функции f имеет горизонтальную асимптоту $y = b$? наклонную асимптоту $y = kx + b$?

7. Может ли кривая пересекать свою асимптоту?

8. Начертите график функции, имеющей горизонтальную асимптоту при $x \rightarrow \infty$ и такой, что при $x \rightarrow +\infty$ график приближается к асимптоте снизу, а при $x \rightarrow -\infty$ — сверху.

9. Может ли график функции иметь при $x \rightarrow +\infty$ и горизонтальную и наклонную асимптоты?

10. Может ли график функции иметь горизонтальную асимптоту при $x \rightarrow +\infty$ и наклонную при $x \rightarrow -\infty$? Сделайте чертеж.

Упражнения

Вычислите пределы следующих функций:

118. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 6x + 8}{5x^3 + 6x^2 + 11}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 - 1}{x^{10} + 1}$.

119. а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 2x + 6}{5x^3 + 6x^2 + 11}$; б) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 2x + 6}{x^3 + 7x^2 - 1}$.

120. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^3 + 4x + 5)(x^3 + x + 1)}{(x + 2)(x^4 + 2x^3 + 7x^2 + x + 1)}$;
б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + 1)(2x + 1)(3x + 1)(4x + 1)(5x + 1)(6x + 1)}{(2x^3 + 3x^2 - 4x - 1)^2}$.

121. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^4 + 1}{9x^6 + 7}}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 3x - 2}}{\sqrt{9x^2 - x + 3}}$.

122. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2}{\sqrt{x^3 + 3x + 4}}$; б) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^3 + 3}}{4x - 1}$.

123. а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x - 2} + \sqrt[3]{2x - 3}}$;

б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 3x\sqrt{x} + 1}{2x^4 - 7x\sqrt[4]{x} + 5}$;

- в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 1}{x^3 + 6}.$
124. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + 6x + 1} + \sqrt[3]{x^6 + 1}}{x^3 - 5x + 1}.$
125. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2x} + \frac{7}{3 - \sqrt[3]{x}} + 1 \right);$
- б) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{5-x}} + \frac{3}{x} - 2 \right);$
- в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{\sqrt{x} - 3} + \frac{2x-1}{2x+1} \right).$
126. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^3 - 5x + 6} - x).$
127. а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^3 + x} - 3x);$ б) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^3 + x} - 3x).$
128. а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^3 + 16} - x);$ б) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^3 + 8x - 3} - \sqrt{x^3 + 4x + 3}).$
129. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x(1-x)^3} - x).$

130. Найдите горизонтальные или наклонные асимптоты графиков следующих функций:

- а) $\frac{4x^3 - 5x + 1}{6x^3 - 7};$ б) $\frac{x^3}{x^3 + 7x + 8};$ в) $\frac{3x^3 - x - 1}{x + 2};$
- г) $\frac{1}{2x^3 + x - 1};$ д) $\frac{x^3 - \sin^2 x}{x^3 + 9};$ е) $\sqrt{x^2 + 9};$
- ж) $\sqrt{x^2 + 9} - x.$

§ 7. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

38. Предел по множеству. Предел последовательности. Выше, определяя предел функции при $x \rightarrow +\infty$, мы предполагали, что существует по крайней мере один луч $]M; +\infty[$, на котором эта функция определена. Обобщим теперь понятие предела на случай, когда область задания функции — любое неограниченное сверху множество.

О п р е д е л е н и е 1.7. Пусть функция f задана на неограниченном сверху множестве X . Число b называется *пределом этой функции по множеству X при $x \rightarrow +\infty$* , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $M > 0$, что

$$f(U^+(\infty, M) \cap X) \subset U(b, \varepsilon)$$

(иными словами, неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ должно выполняться для всех $x \in]M; +\infty[$, в которых определена функция f).

Пишут:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \in X}} f(x) = b.$$

Аналогично определяются записи

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ x \in X}} f(x) = b, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \in X}} f(x) = b, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \in X}} f(x) = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ x \in X}} f(x) = -\infty$$

и т. д. При этом если $x \rightarrow -\infty$, то множество X , на котором определена функция f , должно быть неограниченным снизу, а если $x \rightarrow \infty$, то это множество должно быть неограниченным и сверху, и снизу.

Наиболее важным примером предела по множеству является случай, когда функция f задана на множестве N натуральных чисел, т. е. является последовательностью (a_n) . В этом случае вместо записи $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \in N}} f(x) = b$ используется запись $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = b$ или $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$.

В соответствии с определением предела функции по множеству N при $x \rightarrow +\infty$ эта запись означает следующее: для любого числа $\varepsilon > 0$ существует луч $]M; +\infty[$, такой, что для всех натуральных n из этого луча выполняется неравенство $|a_n - b| < \varepsilon$. Но среди натуральных чисел, принадлежащих лучу $]M; +\infty[$, всегда можно найти наименьшее число n_0 . Тогда слова «существует луч $]M; +\infty[$, такой, что для всех натуральных n из этого луча» можно заменить словами «существует натуральное число n_0 , такое, что для всех $n \geq n_0$ ». В итоге получаем следующее определение:

О п р е д е л е н и е 2.7. Число b называют *пределом последовательности* (a_n) и пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти номер n_0 , такой, что для всех $n \geq n_0$ выполняется неравенство $|a_n - b| < \varepsilon$.

В кванторах это определение записывается так:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in N) (\forall n \in N | n \geq n_0) |a_n - b| < \varepsilon.$$

Последовательность (a_n) называют *бесконечно малой*, если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$, то последовательность (a_n) называют *бесконечно большой*. В этом случае пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

Если последовательность (a_n) имеет конечный предел b , то говорят, что она *сходится* к этому пределу. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ или (a_n) не имеет предела, то (a_n) называют *расходящейся* последовательностью.

Между понятиями предела функции при $x \rightarrow +\infty$ и предела последовательности существует тесная связь.

Т е о р е м а 1.7. Если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ и $a_n = f(n)$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, найдется такое $M > 0$, что при $x > M$ имеем $|f(x) - b| < \varepsilon$. Но тогда если n — натуральное число, такое, что $n > M$, то $|f(n) - b| < \varepsilon$, т. е. $|a_n - b| < \varepsilon$. Этим доказано, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$.

Пример 1. Найдем $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{2n^2 - 3}$.

Решение. Так как $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 3} = \frac{1}{2}$,

то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{2n^2 - 3} = \frac{1}{2}$.

Пример 2. Найдем $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4} - \sqrt{n^2 + 1})$.

Решение. Так как $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 + 1}) = 0$ (см. с. 73), то получаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4} - \sqrt{n^2 + 1}) = 0$.

Пример 3. Докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 0$.

Решение. Поскольку $n!$ имеет смысл лишь при натуральных n , мы не можем воспользоваться при вычислении этого предела теоремой 1.7. Напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \geq n$, а так как $n \rightarrow \infty$, то $n!$ — бесконечно большая последовательность. А тогда $\frac{(-1)^n}{n!}$ — бесконечно малая последовательность, и потому $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 0$.

Пример 4. Докажем, что если $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, то $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = +\infty$.

Решение. Так как по условию $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ и все числа n_k натуральные, то все разности $n_2 - n_1, n_3 - n_2, \dots$ не меньше чем 1: $n_{m+1} - n_m \geq 1$. Но тогда

$$n_k = n_1 + (n_2 - n_1) + (n_3 - n_2) + \dots + (n_k - n_{k-1}) \geq n_1 + k - 1.$$

Так как $\lim_{k \rightarrow \infty} (n_1 + k - 1) = +\infty$, то и $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = +\infty$.

Поскольку определение предела последовательности получается из определения предела функции при $x \rightarrow +\infty$ заменой луча $]M; +\infty[$ на множество натуральных чисел из этого луча, все теоремы о пределах функций при $x \rightarrow +\infty$ переносятся с соответствующими изменениями на пределы последовательностей. Например, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab.$$

Кроме того, если все a_n неотрицательны и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, то $a \geq 0$.

Предоставляем читателю сформулировать аналогии всех утверждений из п. 30 и 34.

Члены последовательности (a_n) можно изобразить точками на числовой прямой. Если n -й член последовательности удовлетворяет неравенству $|a_n - b| < \varepsilon$, то это означает, что он принадлежит ε -окрестности точки b (рис. 57). Если же неравенство $|a_n - b| < \varepsilon$ выполняется для всех $n \geq n_0$, то это означает, что член последовательности с номером n_0 и все последующие члены находятся в выбранной

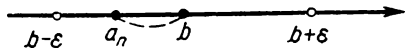


Рис. 57

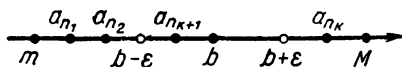


Рис. 58

ε -окрестности точки b . Вне этой окрестности находится лишь конечное множество членов нашей последовательности.

Если некоторое свойство выполняется для всех членов последовательности, кроме, может быть, конечного числа членов, то будем говорить, что *почти все члены* этой последовательности обладают рассматриваемым свойством. Например, почти все члены последовательности $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ положительны.

Теперь мы можем дать геометрическое толкование понятия предела последовательности. Число b является пределом последовательности (a_n) , если выполняется следующее условие: какую бы окрестность точки b ни взять, почти все члены последовательности содержатся в этой окрестности.

Отсюда ясно, что добавление или исключение конечного множества членов последовательности не влияет на сходимость последовательности и на значение ее предела.

Аналогом теоремы 10.5 из п. 30 является следующее утверждение:

Теорема 2.7 (об ограниченности сходящейся последовательности). *Если последовательность сходится, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Тогда почти все члены последовательности (a_n) содержатся в ε -окрестности точки b , т. е. вне этой окрестности находится лишь конечное число членов последовательности: $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}$ (рис. 58). Если теперь взять число M , большее, чем любое число из конечного множества $\{a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, b + \varepsilon\}$, то окажется, что $a_n < M$ для всех n . Значит, последовательность (a_n) ограничена сверху. Аналогично устанавливается ограниченность последовательности снизу. Теорема доказана.

Эта теорема дает лишь необходимое условие сходимости последовательности. Не всякая ограниченная последовательность имеет предел. Например, не имеет предела ограниченная последовательность $0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 0, 1, \dots$. Добавочным условием, обеспечивающим существование предела, является монотонность последовательности.

Как и для функций при $x \rightarrow +\infty$, имеют место следующие достаточные условия сходимости последовательностей:

Теорема 3.7. *Если последовательность (a_n) ограничена сверху и не убывает, то она имеет предел.*

Теорема 4.7. *Если последовательность (a_n) ограничена снизу и не возрастает, то она имеет предел.*

Эти теоремы доказываются точно так же, как теорема 12.5 из п. 32.

Пример 5. Пусть $a > 0$ — действительное число и $(a_n) \rightarrow$

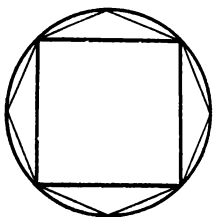


Рис. 59

последовательность его десятичных приближений по недостатку. Докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Решение. Последовательность (a_n) не убывает (для любого n имеем $a_n \leq a_{n+1}$) и ограничена сверху (например, самим числом a). Значит, существует $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Этот предел равен числу a , поскольку разность $a - a_n$ не превышает $\frac{1}{10^n}$ и может быть сделана сколь угодно малой.

Точно так же доказывается, что предел невозрастающей последовательности десятичных приближений числа a по избытку равен a . Аналогичные результаты справедливы для отрицательных действительных чисел. Итак, любое действительное число является пределом последовательности своих десятичных приближений по недостатку и по избытку.

Пример 6. Пусть S_n — площадь правильного 2^{n+1} -угольника, вписанного в окружность радиуса R ($n \geq 2$). Докажем, что последовательность (S_n) имеет предел.

Решение. При удвоении числа сторон площадь многоугольника увеличивается (добавляется 2^{n+1} треугольников) (рис. 59). Поэтому последовательность (S_n) возрастает. Все члены последовательности не превышают числа $4R^2$ — площади описанного квадрата. Значит, (S_n) ограничена сверху. По теореме 3.7 последовательность (S_n) имеет предел, он равен площади круга.

Пример 7. Докажем, что если $0 < q < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Решение. Рассмотрим последовательность q, q^2, q^3, \dots . Она является убывающей ($q > q^2 > q^3 > \dots > q^n > \dots$) и ограниченной снизу (например, нулем). Значит, существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = a$. Так как $q^{n+1} = q \cdot q^n$, то $a = \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = q \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = qa$.

Итак, $a = qa$, откуда, поскольку $q \neq 1$, находим, что $a = 0$.

Заметим, что если $-1 < q < 0$, то $0 < |q| < 1$, а потому $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = 0$. Но тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$. Если $q = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Таким образом, если $-1 < q < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Если же $|q| > 1$, то последовательность (q^n) расходится. В самом деле, если бы она сходилась и имела своим пределом число b , $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = b$, то опять выполнялось бы равенство $b = qb$, т. е. $b = 0$. А это невозможно, поскольку при $|q| > 1$ члены последовательности (q^n) с увеличением номера n отклоняются от нуля все дальше и дальше. Расходится последовательность (q^n) и при $q = -1$ — тогда она имеет вид $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$.

Пример 8. Последовательность (x_n) задана рекуррентно:

$$x_1 = \max(a, 1), \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad (1)$$

где $a > 0$ (см. п. 25). Докажем, что она сходится, и вычислим $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Решение. Так как $\frac{a}{x_n}$ и x_n — приближения к a по недостатку и по избытку, то $x_n < \frac{a}{x_n}$, и потому их среднее арифметическое больше среднего геометрического. Поэтому для любого n имеем:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) > \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}.$$

Это означает, что последовательность (x_n) ограничена снизу и \sqrt{a} — одна из ее нижних граней.

Далее, для любого n имеем:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) < \frac{1}{2} (x_n + x_n) = x_n,$$

а потому последовательность (x_n) убывает.

Итак, мы доказали, что последовательность (x_n) ограничена снизу и убывает. По теореме 4.7 она имеет предел b .

Вычислим значение этого предела. Так как значение предела не зависит от добавления или отбрасывания конечного числа членов последовательности, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}$ также равен b . Перейдем в равенстве

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

к пределу при $n \rightarrow \infty$. Получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \frac{a}{2 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n},$$

т. е. $b = \frac{1}{2} b + \frac{a}{2b}$, откуда находим $b = \sqrt{a}$. Итак, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}$.

Выше мы отмечали (с. 63), что на соотношении (1) основан метод приближенного вычисления квадратных корней (метод последовательных приближений). Доказанное сейчас равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}$ убеждает нас в корректности этого метода.

Пример 9. Последовательность (a_n) задается рекуррентным соотношением $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. Докажем, что она имеет предел и вычислим его.

Решение. Покажем с помощью метода математической индукции, что при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $a_n < 2$.

По условию $a_1 = \sqrt{2} < 2$. Пусть уже доказано, что $a_k < 2$. Тогда имеем $a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} < \sqrt{2 + 2} = 2$.

Итак, неравенство $a_n < 2$ верно при $n=1$, и из его истинности для $n=k$ следует истинность неравенства и для $n=k+1$. Значит,

оно верно для любого n . Таким образом, наша последовательность (a_n) ограничена сверху.

Покажем теперь, что (a_n) — возрастающая последовательность. Так как $a_n < 2$, то имеем:

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} > \sqrt{a_n + a_n} = \sqrt{2a_n} > \sqrt{a_n \cdot a_n} = a_n.$$

Мы получили, что $a_{n+1} > a_n$, а это и означает, что (a_n) — возрастающая последовательность.

Итак, (a_n) — возрастающая ограниченная сверху последовательность. Значит, она имеет предел, который мы обозначим через a : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Найдём значение предела.

Имеем:

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n},$$

откуда

$$a_{n+1}^2 = 2 + a_n,$$

и потому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}^2 = 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Значит, $a^2 = 2 + a$, т. е. $a^2 - a - 2 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = -1$. Поскольку $a_n > 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 0$, а потому из найденных двух корней выбираем $a_1 = 2$. Итак, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

Заметим, что $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$, Поэтому равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ можно записать в следующем виде:

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2} \dots}} = 2.$$

39. Теорема о стягивающейся системе отрезков. Признак существования предела последовательности, сформулированный в теоремах 3.7—4.7 п. 38, не всегда удобен для использования на практике, поскольку с его помощью нельзя установить, насколько данный член последовательности отличается от предела. Более удобный с этой точки зрения следующий признак:

Теорема 5.7. Пусть последовательность (a_n) не убывает, последовательность (b_n) не возрастает, причем для любого n имеем $a_n < b_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$. Тогда обе последовательности (a_n) и (b_n) имеют один и тот же предел: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$.

Доказательство. Пусть A — множество членов последовательности (a_n) , B — множество членов последовательности (b_n) . Для любых k и l выполняется неравенство $a_k < b_l$. В самом деле при $k = l$ оно имеет место по условию, при $k < l$ — так как $a_k \leq a_l < b_l$, а при $k > l$ — так как $a_k < b_k \leq b_l$. Значит, A лежит левее B . Тогда существует хотя бы одно число c , разделяющее множества A и B .

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и рассмотрим ε -окрестность точки c . Так как по условию $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, то найдется такой

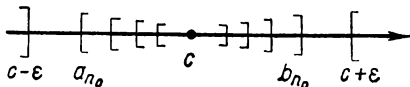


Рис. 60

номер n_0 , что отрезок $[a_{n_0}; b_{n_0}]$ и все следующие за ним попадут в эту окрестность (рис. 60). Таким образом, при $n \geq n_0$ как все члены последовательности (a_n) , так и все члены последовательности (b_n) содержатся в ε -окрестности точки c . Это означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$.

Теорема доказана.

Пример 10. Пусть дана окружность радиуса R , и пусть (p_n) и (P_n) — последовательности периметров вписанных и описанных правильных 2^n -угольников ($n \geq 2$). Эти последовательности удовлетворяют условиям теоремы 5.7, а потому имеют общий предел. Этот предел равен длине окружности.

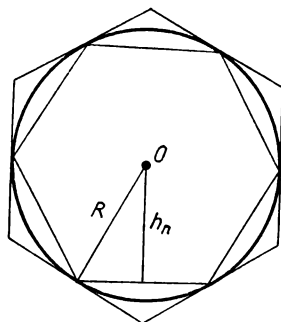


Рис. 61

Пример 11. Пусть s_n — площадь правильного 2^{n+1} -угольника, вписанного в круг радиуса R , S_n — площадь правильного 2^{n+1} -угольника, описанного около того же круга, $n \geq 2$. Так как при удвоении числа сторон площадь правильного вписанного многоугольника увеличивается, а описанного — уменьшается и при этом площадь любого вписанного многоугольника меньше площади описанного многоугольника, то для любого n выполняются неравенства $s_n < s_{n+1}$, $S_n > S_{n+1}$ и $s_n < S_n$. Далее, $\frac{S_n}{s_n} = \frac{R^2}{h_n^2}$, где h_n — апофема вписанного 2^{n+1} -угольника (рис. 61). Поэтому

$$S_n - s_n = s_n \left(\frac{S_n}{s_n} - 1 \right) = s_n \left(\frac{R^2}{h_n^2} - 1 \right).$$

Так как при $n \rightarrow \infty$ имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = R$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{R^2}{h_n^2} - 1 \right) = 0$.

С другой стороны, (s_n) — ограниченная последовательность (все $s_n < 4R^2$). Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \left(\frac{R^2}{h_n^2} - 1 \right) = 0.$$

Последовательности (s_n) и (S_n) удовлетворяют всем условиям теоремы 5.7. Поэтому они имеют один и тот же предел — площадь круга:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pi R^2.$$

Так как основание $1 + \frac{1}{n}$ больше 1, то казалось бы последовательность $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ должна быть бесконечно большой. Но с другой стороны, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ и можно было бы ожидать, что искомый предел равен 1. Оказывается, оба противоречащих друг другу предположения неверны, и $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ является числом, отличным от 1. Это число играет очень важную роль в самых разных вопросах математики, и потому ему присвоено особое обозначение: « e ». Таким образом, число e определяют следующим равенством:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (2)$$

Но чтобы такое определение было обоснованным, надо еще доказать существование предела (2).

Для доказательства нам понадобится следующая лемма:

Л е м м а. Если $h > -1$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh \quad (3)$$

(неравенство Бернулли).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся методом математической индукции. Неравенство Бернулли верно, если $n = 1$, так как в этом случае оно принимает вид $1 + h \geq 1 + h$. Предположим, что для $n = k$ уже доказано неравенство

$$(1 + h)^k \geq 1 + kh. \quad (4)$$

Умножим обе части неравенства (4) на $1 + h$. Так как по условию $h > -1$, то $1 + h > 0$ и знак неравенства (4) после умножения обеих его частей на положительное число не изменится:

$(1 + h)^{k+1} = (1 + h)^k \cdot (1 + h) \geq (1 + kh)(1 + h) = 1 + (k + 1)h + kh^2$.
Но $kh^2 \geq 0$, поэтому

$$(1 + h)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)h.$$

Мы доказали справедливость неравенства (3) при $n = 1$ и доказали, что из его справедливости при $n = k$ следует справедливость при $n = k + 1$. Значит, это неравенство верно при всех натуральных значениях n .

Теперь докажем существование предела (2). Сначала мы докажем, что существует $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, где $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, а потом из существования этого предела выведем существование предела (2).

Воспользуемся теоремой о пределе монотонной ограниченной последовательности. Покажем, что последовательность (a_n) убывает. Для этого рассмотрим отношение $\frac{a_{n-1}}{a_n}$.

Так как

$$a_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n, \quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1},$$

то

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n : \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \frac{n^{2n+1}}{(n-1)^n (n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \times \frac{n}{n+1} =$$

$$= \left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1}.$$

Но по неравенству Бернулли (при $n > 1$) имеем:

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n^2-1} > 1 + \frac{n}{n^2} = \frac{n+1}{n},$$

а потому

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} > \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1.$$

Значит, для любого $n > 1$ имеем $\frac{a_{n-1}}{a_n} > 1$, т. е. $a_{n-1} > a_n$.

Это и значит, что последовательность (a_n) убывает.

Теперь докажем, что эта последовательность ограничена снизу.

По неравенству Бернулли

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > 1 + (n+1) \cdot \frac{1}{n} > 1 + 1 = 2.$$

Значит, (a_n) ограничена снизу числом 2. Но по теореме 4.7 убывающая ограниченная снизу последовательность имеет предел. Существование $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ доказано, причем этот предел не меньше чем 2.

Нам осталось доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Для этого заметим, что

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} : \left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

а $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$. Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} : \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Итак, мы доказали, что существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Этот предел и был обозначен выше через e :

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Мы видели, что $e \geq 2$. Более точные подсчеты показывают, что $e = 2,7182818284590\dots$. Можно доказать, что число e иррациональное и даже трансцендентное, т. е. число e не является корнем никакого уравнения с целыми коэффициентами. Поэтому его нельзя выра-

зять через натуральные числа с помощью конечного числа арифметических операций и извлечений корня. Доказательство иррациональности числа e не слишком сложно, но мы его опускаем. Трансцендентность же этого числа доказывается весьма сложно.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определение предела при $x \rightarrow +\infty$ функции, заданной на произвольном неограниченном сверху множестве X .

2. Сформулируйте определение предела при $x \rightarrow -\infty$ функции, заданной на произвольном неограниченном снизу множестве X .

3. Сформулируйте определение предела последовательности.

4. Какая последовательность называется бесконечно малой? Приведите примеры бесконечно малых последовательностей.

5. Какая последовательность называется бесконечно большой? Приведите примеры бесконечно больших последовательностей.

6. Сформулируйте для последовательностей две теоремы из п. 30.

7. В чем состоит геометрический смысл понятия предела последовательности?

8. Найдите множество $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ для последовательности (a_n) , где $a_n = (-1)^n$.

9. Приведите пример возрастающей неограниченной сверху последовательности. Имеет ли она конечный предел?

10. Приведите пример возрастающей последовательности, ограниченной сверху. Имеет ли она предел?

11. Может ли иметь предел немонотонная последовательность? а неограниченная последовательность?

12. Что является пределом ограниченной возрастающей последовательности? а ограниченной убывающей последовательности?

13. Какая система отрезков называется вложенной? стягивающейся?

14. Является ли вложенной система отрезков

$$[0; 3], \left[\frac{1}{2}; 2\frac{1}{2}\right], \dots, \left[1 - \frac{1}{n}; 2 + \frac{1}{n}\right], \dots?$$

Является ли она стягивающейся?

15. Является ли вложенной система отрезков

$$[2; 3], \left[\frac{3}{2}; 2\frac{1}{2}\right], \dots, \left[1 + \frac{1}{n}; 2 + \frac{1}{n}\right], \dots?$$

16. Какие множества разделяет общая точка стягивающейся системы отрезков?

17. Верна ли теорема 6.7, если вместо отрезков взять полуотрезки $[a_n; b_n]$? Приведите пример стягивающейся системы полуотрезков, не имеющих общей точки.

18. Пределом какой последовательности является число e ?

19. На какие этапы разбивается доказательство существования предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n?$$

20. Отличаются ли пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ друг от друга?

21. Что такое сходящаяся последовательность? расходящаяся последовательность?

22. Верно ли утверждение: если последовательности (a_n) и (b_n) сходятся, то $(a_n + b_n)$ и $(a_n b_n)$ сходятся?

23. Верно ли утверждение: если последовательности (a_n) и (b_n) расходятся, то $(a_n + b_n)$ расходятся? Рассмотрите пример: $a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^{n+1}$.

24. Придумайте пример двух таких расходящихся последовательностей (a_n) и (b_n) , чтобы $(a_n b_n)$ была: а) сходящейся последовательностью; б) расходящейся последовательностью.

25. Последовательность (a_n) сходится, а (b_n) расходится. Может ли сходиться последовательность $(a_n + b_n)$? а $(a_n b_n)$?

26. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, а (b_n) — произвольная последовательность. Можно ли утверждать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$? Приведите примеры как подтверждающие, так и опровергающие это равенство.

27. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$. Следует ли отсюда, что либо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, либо $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$?

28. Докажите, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, то среди значений членов последовательности есть наименьшее.

Упражнения

131. Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+2} = 2$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{2n+1} = \frac{3}{2}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-n+1}{n^2+n+1} = 1$.

Вычислите предел последовательности (a_n) :

132. а) $a_n = \frac{1-n-n^3}{(3n+1)^3}$; б) $a_n = \frac{3-n}{2n+1} - \frac{3n^3+2}{4n^2+1}$;

в) $a_n = \frac{(-1)^n n}{2n-1} \cdot \frac{n}{n^2+n+1}$.

133. а) $a_n = \frac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n}}$; б) $a_n = \sqrt{n^2+2n+2} - \sqrt{n^2-4n+3}$;

в) $a_n = \sqrt[3]{n^3-n^3} + n$.

134. $a_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}}$.

135. а) $a_n = \frac{2n}{2n^2-1} \cos \frac{n+1}{2n-1}$; б) $\frac{2n}{n^2+1} \sin \frac{n-1}{2n+1} + \frac{n}{2n-1} \cdot \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$.

136. Докажите, что последовательность с общим членом a_n имеет предел, если:

а) $a_n = 1 + \frac{1}{2 \cdot 2!} + \frac{1}{3 \cdot 3!} + \dots + \frac{1}{n \cdot n!}$;

б) $a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{n \cdot 2^n}$;

в) $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$;

г) $a_n = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \dots + \frac{1}{2^n+1}$.

137. Докажите, что последовательность, определяемая рекуррентным соотношением $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n^2 + 1)$, имеет предел при $|a_1| < 1$, и найдите значение этого предела.

138. Докажите существование предела последовательности (P_n) , где P_n — периметр правильного 2^n -угольника ($n \geq 2$), описанного около круга радиуса R . Чему равен этот предел?

§ 8. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

41. Определение предела функции в точке. В этом пункте мы определим, что значат слова «функция f стремится к пределу b , когда аргумент x стремится к числу a ». Мы сведем это понятие к уже изученному выше понятию предела функции на бесконечности.

Предварительно рассмотрим функцию $a + \frac{1}{x}$, график которой изображен на рисунке 64. Замечаем, что эта функция отображает

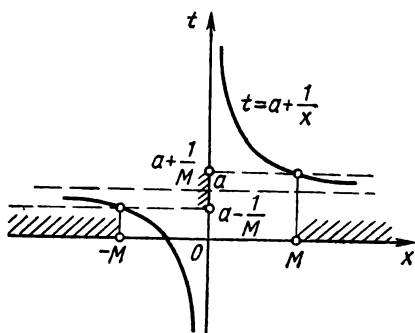


Рис. 64

M -окрестность «точки» ∞ в проколотую $\frac{1}{M}$ -окрестность точки a . В самом деле, если $|x| > M$, то

$$\left| a + \frac{1}{x} - a \right| = \left| \frac{1}{x} \right| < \frac{1}{M}.$$

Кроме того, справедливо равенство $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(a + \frac{1}{x} \right) = a$. Поэтому вместо того чтобы говорить, что аргумент x стремится к a , можно заменить x на $a + \frac{1}{x}$ и говорить, что x стремится к бесконечности.

Введем следующее определение:

О п р е д е л е н и е 1.8. Число b называется *пределом функции f , когда x стремится к a* , если имеет место равенство $\lim_{x \rightarrow a} f\left(a + \frac{1}{x}\right) = b$.

П р и м е р 1. Докажем, что $\lim_{x \rightarrow a} x = a$.

Р е ш е н и е. По определению $\lim_{x \rightarrow a} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(a + \frac{1}{x} \right)$. Но $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(a + \frac{1}{x} \right) = a$, значит, и $\lim_{x \rightarrow a} x = a$.

П р и м е р 2. Докажем, что $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$.

Р е ш е н и е. По определению нам надо доказать, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{x} \right)^2 = 9$.
Имеем:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{x} \right)^2 = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{x} \right) \right)^2 = 3^2 = 9.$$

Значит, $\lim_{x \rightarrow 3} \left(3 + \frac{1}{x} \right)^2 = 9$, а потому $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$.

П р и м е р 3. Докажем, что $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, где $a > 0$.

Решение. По определению $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a + \frac{1}{x}}$. Положим $f(x) = a + \frac{1}{x}$, тогда $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, а потому (см. п. 36)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{a},$$

т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a + \frac{1}{x}} = \sqrt[n]{a}.$$

Значит,

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}.$$

З а м е ч а н и е. Чтобы имело место равенство $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(a + \frac{1}{x}\right) = b$, нужно, чтобы выполнялись равенства

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(a + \frac{1}{x}\right) = b \text{ и } \lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(a + \frac{1}{x}\right) = b.$$

Они могут выполняться лишь при условии, что для некоторого $M > 0$ функция $f\left(a + \frac{1}{x}\right)$ определена на лучах $]M; +\infty[$ и $]-\infty; -M[$.

Но при отображении $x \rightarrow a + \frac{1}{x}$ объединение $U(\infty, M)$ этих лучей переходит, как мы видели выше, в проколотую окрестность $\dot{U}\left(a, \frac{1}{M}\right)$ точки a . Поэтому равенство $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ может иметь место лишь в случае, когда функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки a . В самой точке a эта функция может не быть определенной.

Обозначим через φ такую функцию, что $\varphi(x) = f\left(a + \frac{1}{x}\right)$. Тогда равенство $\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(a + \frac{1}{x}\right) = b$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $M > 0$, что $\varphi(U(\infty, M)) \subset U(b, \varepsilon)$. Но отображение $\varphi: x \rightarrow f\left(a + \frac{1}{x}\right)$ является композицией отображений $x \rightarrow a + \frac{1}{x}$ и $x \rightarrow f(x)$. Первое из них взаимно однозначно отображает $U(\infty, M)$ на $\dot{U}\left(a, \frac{1}{M}\right)$. Поэтому определение предела функции в точке можно сформулировать следующим эквивалентным образом (здесь вместо $\frac{1}{M}$ пишем δ).

О п р е д е л е н и е 2.8. Функция f стремится к пределу b при $x \rightarrow a$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$f(\dot{U}(a, \delta)) \subset U(b, \varepsilon).$$

Если вместо окрестностей использовать неравенства, получим еще одно эквивалентное определение.

О п р е д е л е н и е 3.8. Функция f *стремится к пределу b при $x \rightarrow a$* , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x , таких, что $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

С помощью кванторов эти определения записываются следующим образом:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) f(\dot{U}(a, \delta)) \subset U(b, \varepsilon),$$

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x | 0 < |x - a| < \delta) |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Определение 2.8 будем называть определением «на языке окрестностей», а определение 3.8 — определением «на языке ε - δ ».

П р и м е р 4. Докажем, что $\lim_{x \rightarrow a} b = b$.

Р е ш е н и е. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ сводится в данном случае к неравенству $|b - b| < \varepsilon$, которое выполняется при всех x и, в частности, в любой проколотой окрестности точки a . Итак, существует проколотая окрестность $\dot{U}(a, \delta)$, в которой $|f(x) - b| < \varepsilon$, а это и означает, что число b — предел функции f , заданной равенством $f(x) = b$.

Геометрический смысл равенства $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ состоит в следующем: для любой горизонтальной полоски, «окружающей» прямую $y = b$, можно найти вертикальную полоску, «окружающую» прямую $x = a$, в которой все точки графика функции f (кроме, быть может, точки на прямой $x = a$) принадлежат прямоугольнику, образованному пересечением полосок (рис. 65).

Поскольку в определении предела функции при $x \rightarrow a$ значение функции в точке a не учитывается, то из равенства $f(x) = \varphi(x)$ при $x \neq a$ следует, что либо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$, либо оба предела не существуют.

42. Свойства предела функции. Поскольку определение понятия предела функции при $x \rightarrow a$ сводится к уже изученному понятию предела функции при $x \rightarrow \infty$, все доказанные в п. 30 и 34 утверждения о пределах функций при $x \rightarrow \infty$ переносятся с соответствующими изменениями на пределы функций при $x \rightarrow a$. Например, аналогом теоремы 7.5 является утверждение:

$$\text{Если } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b_2$$

и $b_1 < b_2$, то существует проколотая окрестность точки a , в которой выполняется неравенство $f(x) < g(x)$.

Докажем его. Так как

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1, \text{ то } \lim_{x \rightarrow \infty} f\left(a + \frac{1}{x}\right) = b_1.$$

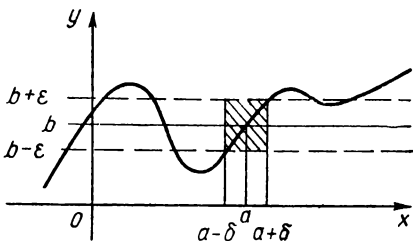


Рис. 65

Так как $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b_2$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} g\left(a + \frac{1}{x}\right) = b_2$. По условию $b_1 < b_2$, поэтому согласно утверждению 2 из п. 31 существует окрестность $U(\infty, M)$, в которой выполняется неравенство $f\left(a + \frac{1}{x}\right) < g\left(a + \frac{1}{x}\right)$.

Поскольку отображение $x \rightarrow a + \frac{1}{x}$ переводит окрестность $U(\infty, M)$ в $\dot{U}\left(a, \frac{1}{M}\right)$, то в проколотой окрестности $\dot{U}\left(a, \frac{1}{M}\right)$ выполняется неравенство $f(x) < g(x)$, что и требовалось доказать. Предоставляем читателю сформулировать и доказать аналоги остальных теорем из п. 30.

Пример 5. Вычислим:

$$\lim_{x \rightarrow 4} (x^3 - 3x + 8).$$

Решение. По указанным выше свойствам предела имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} (x^3 - 3x + 8) &= \lim_{x \rightarrow 4} x^3 + \lim_{x \rightarrow 4} (-3x) + \lim_{x \rightarrow 4} 8 = (\lim_{x \rightarrow 4} x)^3 + \\ &+ \lim_{x \rightarrow 4} (-3) \cdot \lim_{x \rightarrow 4} x + \lim_{x \rightarrow 4} 8. \end{aligned}$$

Но $\lim_{x \rightarrow 4} x = 4$, $\lim_{x \rightarrow 4} (-3) = -3$, $\lim_{x \rightarrow 4} 8 = 8$, и потому

$$\lim_{x \rightarrow 4} (x^3 - 3x + 8) = 4^3 - 3 \cdot 4 + 8 = 12.$$

Таким образом, чтобы найти предел многочлена $x^3 - 3x + 8$ при $x \rightarrow 4$, оказалось достаточно подставить в этот многочлен вместо x значение 4. В силу теорем о пределах это имеет место для любого многочлена, т. е. справедлива.

Теорема 1.8. Предел многочлена $P(x)$ при $x \rightarrow a$ равен значению этого многочлена при $x = a$, т. е. $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$.

Используя утверждение о пределе дроби, приходим к более общей теореме.

Теорема 2.8. Если $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, причем $Q(a) \neq 0$, то предел дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ при $x \rightarrow a$ равен ее значению при

$$x = a, \text{ т. е. } \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}.$$

Доказательство. По теореме 1.8 имеем:

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a) \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} Q(x) = Q(a).$$

Так как $Q(a) \neq 0$, то получаем:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} P(x)}{\lim_{x \rightarrow a} Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}.$$

Пример 6. Вычислим $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 3x - 4}{2x + 3}$.

Решение. Имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 3x - 4}{2x + 3} = \frac{3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 4}{2 \cdot 2 + 3} = 2.$$

Пример 7. Вычислим предел $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 25}$.

Решение. Подстановка числа 5 вместо x не приводит к цели, так как при этом значении переменной x и числитель, и знаменатель обращаются в нуль. Поэтому преобразуем дробь:

$$\frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 25} = \frac{(x-1)(x-5)}{(x+5)(x-5)} = \frac{x-1}{x+5}$$

(сокращение возможно, поскольку функцию достаточно рассматривать лишь в проколотой окрестности числа 5). Теперь уже легко найти

$$\text{искомый предел: } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 25} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-1}{x+5} = \frac{5-1}{5+5} = 0,4.$$

Пример 8. Вычислим предел $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$.

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\sqrt[3]{x}-2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} (\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4) = \sqrt[3]{8^2}+2\sqrt[3]{8}+4 = 12 \end{aligned}$$

(мы воспользовались тем, что $\lim_{x \rightarrow 8} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{8} = 2$, — см. пример 3 из п. 41).

Этот же предел можно вычислить иначе с помощью подстановки $x = t^3$. Когда $x \rightarrow 8$, то $t \rightarrow 2$. Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^3-8}{t-2} = \lim_{t \rightarrow 2} (t^2+2t+4) = 12.$$

Введем понятие бесконечно малой функции при $x \rightarrow a$.

Определение 4.8. Функция α называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$.

Например, функции $x-a$, $(x-a)^2$, $(x-a)^3$, ... бесконечно малы при $x \rightarrow a$.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 3.8. Функция f имеет предел b при $x \rightarrow a$ тогда и только тогда, когда функция $f-b$ бесконечно мала при $x \rightarrow a$.

Доказательство. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - b) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} b = b - b = 0.$$

Обратно, если $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - b) = 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} b = 0,$$

откуда $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - b = 0$, т. е. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

43. Предел по множеству. Односторонние пределы. Как и при $x \rightarrow \infty$, понятие предела функции при $x \rightarrow a$ обобщается на случай, когда x стремится к a , пробегая некоторое множество значений.

О п р е д е л е н и е 5.8. Точка a называется *предельной точкой множества* X , если пересечение любой проколотой окрестности точки a с X непусто:

$$(\forall \delta > 0) \mathring{U}(a, \delta) \cap X \neq \emptyset.$$

П р и м е р 9. Любая точка отрезка $[a; b]$ является предельной точкой для множества X рациональных чисел этого отрезка, поскольку в любой проколотой окрестности точки $c \in [a; b]$ найдутся рациональные числа из $[a; b]$.

П р и м е р 10. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, причем ни одно a_n не совпадает с a . Докажем, что тогда a является предельной точкой для множества $X = \{a_n | n \in N\}$.

Р е ш е н и е. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, то в любой окрестности точки a найдутся точки из X . При этом, поскольку все a_n отличны от a , эти точки принадлежат и проколотым окрестностям.

О п р е д е л е н и е 6.8. Пусть X — некоторое подмножество области задания функции f и a — предельная точка для X . Число b называется *пределом функции* f , когда x стремится к a по множеству X , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что на множестве

$\mathring{U}(a, \delta) \cap X$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in \mathring{U}(a, \delta) \cap X) |f(x) - b| < \varepsilon.$$

В этом случае пишут $\lim f(x) = b$.

Из этого определения вытекает, что если $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in X}} f(x) = b$ и X_1 — подмножество в X , для которого a — предельная точка, то $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in X_1}} f(x) = b$.

В частности, если $\lim f(x) = b$ и (a_n) — последовательность точек из X , такая, что $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in X}} a_n = a$ и $(\forall n) a_n \neq a$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = b$. В самом деле, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ является не чем иным, как пределом функции f , когда x стремится к a , пробегая множество $\{a_n | n \in N\}$.

Итак, справедлива теорема:

Т е о р е м а 4.8. Если $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in X}} f(x) = b$ и (a_n) — последовательность чисел из X , отличных от a , и сходящаяся к a , то $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = b$.

Теорема 4.8 позволяет во многих случаях установить, что не существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. А именно если найдутся такие две последователь-

ности (a'_n) и (a''_n) , что $\lim_{n \rightarrow \infty} a'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a''_n = a$, но $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a'_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(a''_n)$, то предела не существует. Если бы он существовал и равнялся b , то и $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a'_n)$, и $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a''_n)$ были бы равны b .

Пример 11. Докажем, что не существует $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{2x}$.

Решение. Возьмем последовательность (a'_n) , где $a'_n = \frac{1}{4n+1}$.

Мы имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4n+1} = 0$. Далее, $f\left(\frac{1}{4n+1}\right) = \sin \frac{\pi(4n+1)}{2} = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1$, и потому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{4n+1}\right) = 1. \quad (1)$$

С другой стороны, для последовательности (a''_n) , где $a''_n = \frac{1}{4n}$, имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4n} = 0$, но $f\left(\frac{1}{4n}\right) = \sin \frac{4\pi n}{2} = \sin 2\pi n = 0$, и потому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{4n}\right) = 0. \quad (2)$$

Так как пределы (1) и (2) различны, то $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{2x}$ не существует.

Важными частными случаями предела функции по множеству являются односторонние пределы.

Определение 7.8. Пусть область определения функции f содержит какой-нибудь из промежутков $]a - \delta; a[$. *Пределом функции f , когда x стремится к a слева*, называют предел этой функции, когда x стремится к a по множеству $X =]a - \delta; a[$.

Поскольку несущественно, какой выбрать из промежутков $]a - \delta; a[$, лишь бы на них была определена функция f , для левостороннего предела при $x \rightarrow a$ применяют обозначение $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$. Еще

короче обозначают этот предел так: $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ или $f(a-0)$.

Аналогично определяется понятие правостороннего предела.

Определение 8.8. Пусть область определения функции f содержит какой-нибудь из промежутков $]a; a + \delta[$. *Пределом функции f , когда x стремится к a справа*, называют предел этой функции, когда x стремится к a по множеству $]a; a + \delta[$. Обозначение: $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$,

или $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$, или $f(a+0)$.

Имеют место очевидные равенства:

$$f(a-0) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(a + \frac{1}{x}\right); f(a+0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(a + \frac{1}{x}\right).$$

Теорема 5.8. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ существует тогда и только тогда, когда существуют односторонние пределы $f(a-0)$, $f(a+0)$, причем оба они равны b .

Доказательство. Проколотая окрестность точки a состоит из промежутков $]a-\delta; a[$ и $]a; a+\delta[$. Поэтому если $|f(x) - b| < \varepsilon$ при $x \in \dot{U}(a, \delta)$, то тем более $|f(x) - b| < \varepsilon$ при $x \in]a-\delta; a[$ или при $x \in]a; a+\delta[$.

Обратно, если $f(a-0) = f(a+0) = b$, то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. В самом деле, возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$ и $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$, то найдется такое $\delta > 0$, что как на $]a-\delta; a[$, так и на $]a; a+\delta[$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Но проколотая окрестность $\dot{U}(a, \delta)$ распадается на две половины: $]a-\delta; a[$ и $]a; a+\delta[$. Значит, неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ выполняется и во всей проколотой окрестности $\dot{U}(a, \delta)$. Поэтому $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Пример 12. Найдем односторонние пределы при $x \rightarrow 3$ функции f , где $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & x < 3, \\ 2x + 1, & x > 3. \end{cases}$

Существует ли $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$?

Решение. При $x < 3$ имеем $f(x) = x^2 - 2x + 1$. Поэтому $f(3-0) = \lim_{x \rightarrow 3-0} (x^2 - 2x + 1) = 3^2 - 2 \cdot 3 + 1 = 4$.

Точно так же $f(3+0) = \lim_{x \rightarrow 3+0} (2x + 1) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$.

Так как $f(3-0) \neq f(3+0)$, то $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ не существует.

44. Теорема о пределе монотонной ограниченной функции. Перенесем на случай предела функции в точке доказанную в п. 32 теорему о существовании предела монотонной ограниченной функции.

Теорема 6.8. Пусть функция f монотонна и ограничена на $]a; b[$. Тогда существуют односторонние пределы $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$.

Доказательство. Предположим для определенности, что функция f возрастает на $]a; b[$, и докажем существование предела $f(a+0)$. Положим $\varphi(x) = f\left(a + \frac{1}{x}\right)$.

Отображение $x \rightarrow a + \frac{1}{x}$ является биективным (см. с. 8) отображением луча $\left] \frac{1}{b-a}; +\infty \right[$ на $]a; b[$. Если $\frac{1}{b-a} < x_1 < x_2$, то $a + \frac{1}{x_1} > a + \frac{1}{x_2}$, и потому в силу возрастания f имеем:

$$f\left(a + \frac{1}{x_1}\right) > f\left(a + \frac{1}{x_2}\right).$$

Это значит, что $\varphi(x_1) > \varphi(x_2)$, т. е. что функция φ убывает на $\left] \frac{1}{b-a}; +\infty \right[$. Из ограниченности функции f на $]a; b[$ вытекает ограниченность функции φ на $\left] \frac{1}{b-a}; +\infty \right[$. Значит, по теореме 12.5 п. 32 существует предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$. Но $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(a + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$, и потому существует $f(a+0)$.

Случаи, когда функция f убывает на $]a; b[$, а также вопрос о существовании пределов, когда x стремится к b , рассматриваются аналогично.

45. Бесконечные пределы. Вертикальные асимптоты. Смысл записи $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ определяется точно так же, как и смысл записи $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Мы будем считать, что $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, если $\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(a + \frac{1}{x}\right) = \infty$, т. е. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f\left(a + \frac{1}{x}\right)} = 0$. Вспоминая определение функций,

являющихся бесконечно большими при $x \rightarrow \infty$, получаем, что $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, если для любого $P > 0$ найдется такое $M > 0$, что при $|x| > M$ выполняется неравенство $\left| f\left(a + \frac{1}{x}\right) \right| > P$. Но отображение $x \rightarrow a + \frac{1}{x}$ переводит множество $\{x \mid |x| > M\}$ в проколотую окрестность $\mathring{U}\left(a, \frac{1}{M}\right)$ точки a . Поэтому приходим к следующему определению:

О п р е д е л е н и е 9.8. Функция f называется *бесконечно большой* при $x \rightarrow a$, если для любого $P > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что в проколотой окрестности $\mathring{U}(a, \delta)$ выполняется неравенство $|f(x)| > P$.

С помощью кванторов это определение записывается следующим образом:

$$(\forall P > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in \mathring{U}(a, \delta)) |f(x)| > P,$$

или так:

$$(\forall P > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \mid 0 < |x - a| < \delta) |f(x)| > P.$$

Определение 9.8 эквивалентно следующему:

О п р е д е л е н и е 9'.8. Функция f *бесконечно велика* при $x \rightarrow a$, если для любого $P > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$\begin{aligned} & \mathring{f}(\mathring{U}(a, \delta)) \subset U(\infty, P); \\ & (\forall P > 0) (\exists \delta > 0) \mathring{f}(\mathring{U}(a, \delta)) \subset U(\infty, P). \end{aligned}$$

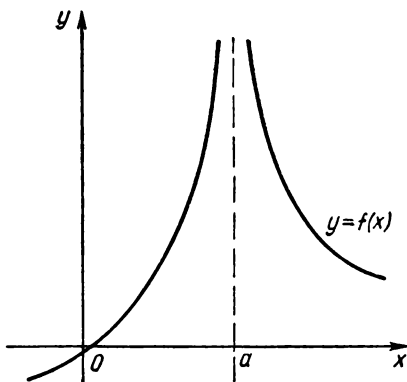


Рис. 66

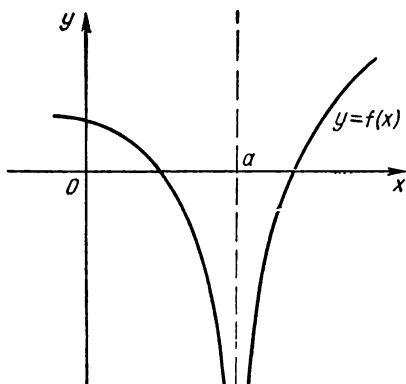


Рис. 67

Заменяя в этих определениях неравенство $|f(x)| > P$ на $f(x) > P$ ($f(x) < -P$) или, что то же самое, заменяя $U(\infty, P)$ на $U^+(\infty, P)$ ($U^-(\infty, P)$), получаем определение записи

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad (\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty).$$

На рисунке 66 изображен график такой функции f , что $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, а на рисунке 67 — такой функции f , что $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Поскольку определение бесконечно большой при $x \rightarrow a$ функции сводится к понятию бесконечно большой функции при $x \rightarrow \infty$, все утверждения о бесконечно больших функциях из п. 33 верны и при $x \rightarrow a$. Например, справедливы утверждения:

1. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

2. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ и f отлична от нуля в некоторой проколотой окрестности точки a , то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

3. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, то $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty$.

4. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ и функция g в некоторой окрестности точки a ограничена, то $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \infty$.

5. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) g(x) = \infty$.

6. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \neq 0$, то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) g(x) = \infty$.

Из 2 и 6 следует, что если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \neq 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty.$$

Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, то при приближении x к a расстояние точек линии $y = f(x)$ от прямой $x = a$ стремится к нулю, а от оси абсцисс — к бесконечности. Иными словами, $x = a$ — *вертикальная асимптота* для графика функции f , если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

Пример 13. Найдем $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3x + 2}$.

Решение. Поскольку при $x = -1$ значение функции $x^2 + 1$ равно 2, а функция $x^2 + 3x + 2$ обращается в нуль, то

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 1} = 0, \text{ а потому } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3x + 2} = \infty.$$

Если $x > -1$, то и числитель, и знаменатель дроби $\frac{x^2 + 1}{x^2 + 3x + 2}$ положительны. Поэтому $\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3x + 2} = +\infty$. Если же $-2 < x < -1$, то числитель дроби положителен, а знаменатель отрицателен, поэтому

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3x + 2} = -\infty.$$

Точно так же доказывается, что $\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3x + 2} = +\infty$ и

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3x + 2} = -\infty. \text{ Наконец, заметим, что } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3x + 2} = 1.$$

Этого достаточно, чтобы сделать эскиз графика функции $\frac{x^2 + 1}{x^2 + 3x + 2}$. Около точек $x = -1$ и $x = -2$ этот график уходит в бесконечность, а при $x \rightarrow \infty$ стремится к прямой $y = 1$ (рис. 68).

Пример 14. Найдем асимптоты и сделаем эскиз графика функции $\frac{x^3}{x^2 - 9}$.

Решение. Данная функция определена для всех x , кроме $x = 3$, $x = -3$. Она нечетна, так как

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 9} = \\ &= -\frac{x^3}{x^2 - 9} = -f(x). \end{aligned}$$

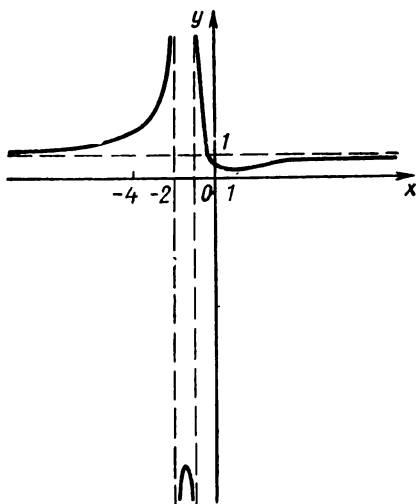


Рис. 68

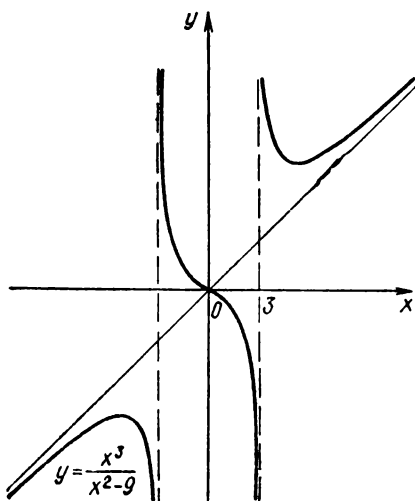


Рис. 69

Исследуем функцию при $x \geq 0$. Найдем точки пересечения графика с осями координат. При $x = 0$ имеем $y = 0$. Поэтому график проходит через начало координат. Иных точек пересечения с осями координат этот график не имеет.

Исследуем поведение функции при приближении x к значению 3 слева и справа. При $0 < x < 3$ имеем $x^2 - 9 < 0$, а при $x > 3$ имеем $x^2 - 9 > 0$. Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{x^3}{x^2 - 9} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{x^3}{x^2 - 9} = +\infty.$$

Значит, $x = 3$ является вертикальной асимптотой. Наконец, исследуем поведение функции при $x \rightarrow \infty$. Мы имеем:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(x^2 - 9)} = 1; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 9} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x}{x^2 - 9} = 0.$$

Отсюда следует (см. п. 37), что $y = x$ — наклонная асимптота графика этой функции. Эскиз графика имеет вид, изображенный на рисунке 69.

Вопросы для самопроверки

1. Что означает запись $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$? Сформулируйте определение предела функции f при $x \rightarrow a$ «на языке окрестностей», «на языке ε - δ ».
2. Объясните, почему в определении предела «на языке ε - δ » пишут $0 < |x - a| < \delta$, а не $|x - a| < \delta$.
3. Сформулируйте свойства пределов функций при $x \rightarrow a$.
4. Как вычислить предел при $x \rightarrow a$ многочлена? предел рациональной функции, у которой значение $x = a$ не является корнем знаменателя?
5. Какая функция называется бесконечно малой при $x \rightarrow a$?
6. Приведите примеры функций, бесконечно малых при $x \rightarrow 0$; при $x \rightarrow 1$; при $x \rightarrow -3$.
7. Что такое предельная точка множества X ? Приведите пример предельной точки.
8. Что означает запись $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in X}} f(x) = b$?
9. Что называется односторонним пределом функции в точке a ?
10. В каком случае из существования односторонних пределов функции f при $x \rightarrow a$ следует существование $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$?

11. Дайте определение (с помощью кванторов) следующих утверждений и сделайте соответствующие рисунки:

- а) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$; б) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$;
 в) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty$; г) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$;
 д) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty$; е) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty$.

Упражнения

139. Докажите с помощью определения предела функции в точке, что:

- а) $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1) = 2$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8$; г) $\lim_{x \rightarrow 8} \sqrt[3]{x} = 2$.

140. Докажите, что утверждение $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{2x} = 1$ неверно.

141. Докажите, что утверждения $\lim_{x \rightarrow 0} D(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} D(x) = 0$, где $D(x)$ — функция Дирихле, являются неверными (см. с. 35).

142. а) Формулируя определение предела функции в точке, студент вместо «для любого $\varepsilon > 0$ » сказал «существует $\varepsilon > 0$ ». Докажите, что при таком «определении» $\lim_{x \rightarrow 0} D(x) = 1$.

б) Студент дал следующую формулировку определения предела функции в точке: для любого ε найдется такое $\delta > 0$, что на $\{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. В чем ошибочность такой формулировки? Найдется ли хоть одно $\delta > 0$, если взять $\varepsilon = -1$?

в) Можно ли в определении предела вместо $\varepsilon > 0$ написать $\varepsilon \geq 0$? Какие функции будут тогда иметь предел?

г) Студент в формулировке определения предела вместо «найдется $\delta > 0$ » сказал «для всех $\delta > 0$ ». Какие функции имеют предел по такому «определению»?

143. Докажите, что если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, то $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |b|$.

Вычислите следующие пределы:

144. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^4 - 2x^3 + 1}{10x^5 - x^4 + 3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 + 3x^2 - 1}$.

145. а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x + 2}{x^3 + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3 + 8}$; в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x + 2}{x^3 - 8}$.

146. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$; б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x + 8}{x^3 - 4x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x + 5}{x^2 + x - 2}$.

147. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

148. Найдите односторонние пределы в точке a функции f , если:

а) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 2, \\ -2x+1, & x > 2, \end{cases} \quad a=2; \quad б) f(x) = \frac{x^3-1}{|x-1|}, \quad a=1;$

в) $f(x) = \frac{x}{(x-3)^2}, \quad a=3; \quad г) f(x) = \begin{cases} x^2-1, & x < 0, \\ x-1, & 0 \leq x \leq 1, \\ (x-1)^2, & x > 1, \end{cases} \quad a=0, \quad a=1.$

Для каких из этих функций существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$?

149. Пусть $f(x) = \frac{x^3-27}{x-3}$, $a_n = \frac{3n^3+5}{n^3+n^2-1}$. Найдите предел последовательности $(f(a_n))$.

150. Пусть $f(x) = \cos \frac{\pi}{x}$. Найдите пределы последовательностей $\left(f\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right)$ и $\left(f\left(\frac{1}{2n}\right)\right)$. Существует ли $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?

151. В каких точках имеет бесконечный предел функция $\frac{x^3}{(x+1)(x^2-4)}$?

Исследуйте поведение функции слева и справа от этих точек.

152. Сделайте эскизы графиков следующих функций:

а) $\frac{x}{x^2-4}$; б) $\frac{x^2+4}{x^2-4}$; в) $\frac{x^2-9}{x^2-4}$; г) $\frac{x^2-4}{x^2-9}$.

§ 9. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

46. Непрерывные и разрывные процессы. Непрерывные функции. Многие физические процессы характеризуются тем, что постепенное, плавное изменение физических величин сменяется скачкообразным — количественные изменения переходят в качественные.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Пусть груз висит на нити над столом (рис. 70). По мере увеличения нагрузки нить будет постепенно растягиваться: расстояние l груза от точки подвеса будет понемногу увеличиваться. Но если нагрузка m больше некоторой критической нагрузки m_0 , то нить рвется, груз падает вниз и его расстояние от точки подвеса скачкообразно увеличивается. График зависимости l от нагрузки m имеет вид, изображенный на рисунке 71. В точке m_0 возникает новое качественное состояние: нить рвется.

Пример 2. В процессе нагревания смеси водорода и кислорода (гремучего газа) при постоянном давлении происходит постепенное увеличение ее объема. Но при некотором критическом значении температуры T_0 происходит химическая реакция соединения водорода и кислорода, смесь взрывается, и ее объем скачкообразно увеличивается. Возникает новое качество — смесь водорода и кислорода превращается в водяной пар.

В математике различию между постепенным и скачкообразным изменениями величин соответствует различие между непрерывностью и разрывностью функции. Грубо говоря, функция непрерывна в тех точках, где малое изменение аргумента влечет за собой малое изменение функции, и разрывна там, где при сколь угодно малом изменении аргумента может получиться большое изменение функции. Функция, график которой изображен на рисунке 72, терпит разрыв в точках a , b и c , причем в достаточно малых окрестностях точек a и c функция ограничена, а в сколь угодно малой окрестности точки b она не ограничена.

Определение непрерывности функции в точке a весьма похоже на определение предела функции в этой точке. Различие

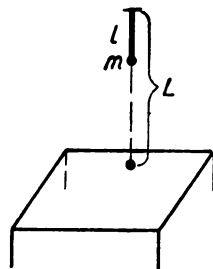


Рис. 70

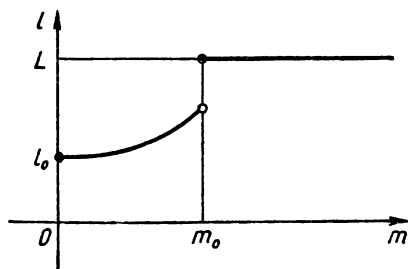


Рис. 71

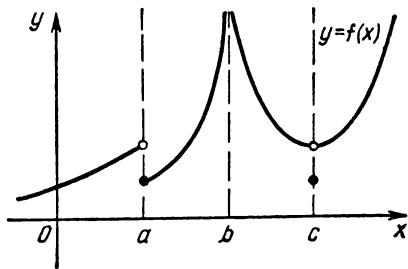


Рис. 72

состоит лишь в том, что вместо любого числа b берется значение $f(a)$ данной функции в точке a . Это позволяет вместо проколотой окрестности брать просто окрестность точки a .

О п р е д е л е н и е 1.9. Пусть функция f определена на числовом множестве X . Ее называют *непрерывной в точке a* этого множества, если для любой окрестности $U(f(a), \varepsilon)$ точки $f(a)$ найдется такая окрестность $U(a, \delta)$ точки a , что

$$f(U(a, \delta) \cap X) \subset U(f(a), \varepsilon)$$

(мы берем $U(a, \delta) \cap X$, а не $U(a, \delta)$, так как функция f определена лишь на множестве X).

Если задать окрестности неравенствами, то определение 1.9 примет следующий вид:

О п р е д е л е н и е 2.9. Функция f , заданная на множестве X , называется *непрерывной в точке $a \in X$* , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из $x \in X$ и $|x - a| < \delta$ следует $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Разберем два случая:

а) Точка a является предельной для X .

б) Точка a , хотя и принадлежит множеству X , не является для него предельной точкой; в этом случае a называют *изолированной точкой* множества X .

В случае а) непрерывность функции f в точке a равносильна тому, что $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in X}} f(x) = f(a)$. В самом деле, различие между равенством

$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in X}} f(x) = f(a)$ и непрерывностью функции f в точке a состоит лишь

в том, что в первом случае в определение входит проколотая окрестность точки a :

$$f(\dot{U}(a, \delta) \cap X) \subset U(f(a), \varepsilon),$$

а во втором случае окрестность этой точки не прокалывается:

$$f(U(a, \delta) \cap X) \subset U(f(a), \varepsilon).$$

Но при $x = a$ имеем для любого $\varepsilon > 0$ $f(x) = f(a) \in U(f(a), \varepsilon)$, и потому это отличие несущественно. Значит, имеем еще одно определение непрерывности:

Определение 3.9. Если точка a множества X является предельной для этого множества, то функция f , заданная на X , непрерывна в точке a в том и только том случае, когда $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Отметим, что условие «точка a предельна для X » заведомо выполняется, если X — промежуток, а a — точка этого промежутка или его конечная точка.

В случае б) существует окрестность $U(a, \delta)$ точки a , не содержащая точек из X , отличных от a . Пересечение $U(a, \delta) \cap X$ этой окрестности с X состоит лишь из точки a , и потому для этой окрестности имеем при любом $\varepsilon > 0$

$$f(U(a, \delta) \cap X) = f(a) \in U(f(a), \varepsilon).$$

Значит, если функция f определена в изолированной точке множестве X , то она непрерывна в этой точке.

Пример 3. Докажем, что функция $\sqrt{-\sin^2 \pi x}$ непрерывна в любой точке, где она определена.

Решение. Данная функция определена лишь на множестве целых чисел. Так как все точки этого множества изолированы, она непрерывна во всех точках, где определена.

Итак, мы получили три эквивалентных друг другу определения непрерывности функции f в точке a в случае, когда a — предельная точка области задания X для f . Первое из них называется определением непрерывности функции в точке «на языке окрестностей», второе — «на языке ε - δ », третье — «на языке пределов». Отметим, что определение «на языке ε - δ » называется также *определением Коши*.

Пример 4. Докажем, что функции f и g , где $f(x) = C$, $g(x) = x$, непрерывны в любой точке $a \in \mathbb{R}$.

Решение. Так как $\lim_{x \rightarrow a} C = C$, а $\lim_{x \rightarrow a} x = a$, то получаем, что $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$.

В соответствии с определением непрерывности функции в точке «на языке пределов» функции f и g непрерывны в точке a .

Пример 5. Докажем, что функция $\sqrt[n]{x}$ непрерывна в любой точке $a \geq 0$.

Решение. Так как $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$

(см. п. 41), то функция $\sqrt[n]{x}$ непрерывна в точке a .

Пример 6. Докажем, что функция $\sin x$ непрерывна в любой точке $a \in \mathbb{R}$.

Решение. Сначала докажем, что для любого $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ выполняется неравенство $|\sin x| \leq |x|$. Длина дуги AB (рис. 73) равна $2|x|$, а длина хорды AB равна $2|\sin x|$. Так как $|AB| \leq \widehat{AB}$, то $2|\sin x| < 2|x|$, а потому $|\sin x| \leq |x|$.

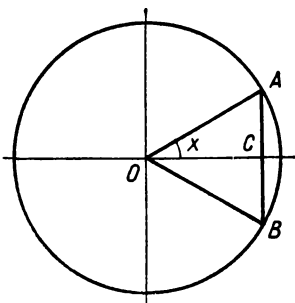


Рис. 73

Возьмем теперь произвольное $\varepsilon > 0$. Нам надо найти такое δ , чтобы из неравенства $|x - a| < \delta$ следовало неравенство $|\sin x - \sin a| < \varepsilon$. Но $|\sin x - \sin a| = 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \left| \cos \frac{x+a}{2} \right|$. Так как $\left| \cos \frac{x+a}{2} \right| \leq 1$, а $\left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \leq \left| \frac{x-a}{2} \right|$, то $|\sin x - \sin a| \leq 2 \left| \frac{x-a}{2} \right| = |x - a|$.

Значит, если выбрать $\delta = \varepsilon$, то из $|x - a| < \delta$ следует, что $|\sin x - \sin a| < \varepsilon$. Но это и означает непрерывность функции $\sin x$ в точке $x = a$ (мы воспользовались определением непрерывности «на языке ε - δ »).

Точно так же доказывается, что функция $\cos x$ непрерывна в любой точке a .

О п р е д е л е н и е 4.9. Если функция f непрерывна в каждой точке множества X , то она называется *непрерывной на множестве X* .

Так, из рассмотренных выше примеров следует, что функции C , x , $\sin x$, $\cos x$ непрерывны на множестве R , а функция \sqrt{x} непрерывна на множестве R_0 ; функция $\sqrt{1 - \sin^2 \pi x}$ непрерывна на Z .

47. Арифметические операции над непрерывными функциями. Из каждой теореме о пределах получается соответствующая теорема о непрерывных функциях.

Т е о р е м а 1.9. Пусть функции f и g непрерывны в точке a . Тогда их сумма $f + g$ и произведение fg также непрерывны в точке a . Если, кроме того, $g(a) \neq 0$, то частное $\frac{f}{g}$ тоже непрерывно при $x = a$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция f задана на множестве X_1 , а функция g — на множестве X_2 , и пусть $X = X_1 \cap X_2$. Если a — предельная точка для множества X , то в силу того, что сужения функций f и g на X непрерывны в точке a , имеем $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in X}} f(x) = f(a)$ и

$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in X}} g(x) = g(a)$, а потому

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in X}} (f + g)(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in X}} f(x) + \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in X}} g(x) = f(a) + g(a) = (f + g)(a).$$

Значит, в этом случае функция $f + g$ непрерывна в точке a .

Если же a — изолированная точка множества X , то функция $f + g$ непрерывна в a , поскольку X является для $f + g$ областью определения, а всякая функция непрерывна в изолированных точках ее области определения.

Остальные утверждения теоремы доказываются аналогично.

С л е д с т в и е 1. Многочлен непрерывен в любой точке.

В самом деле, любой многочлен $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ получается из непрерывных функций a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 , x с помощью операций сложения и умножения. Значит, функция вида $a_n x^n + \dots + a_0$ непрерывна при всех значениях x , т. е. на всем множестве R .

С л е д с т в и е 2. Рациональная функция

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0}$$

непрерывна при всех значениях x , для которых знаменатель отличен от нуля.

П р и м е р 7. Докажем, что функция f , где $f(x) = \cos^4 x + 3 \sin^3 x$, непрерывна при всех значениях x .

Р е ш е н и е. Достаточно заметить, что функция f получается из функций $\sin x$, $\cos x$, непрерывных при всех значениях x (см. п. 46), с помощью операций сложения и умножения.

П р и м е р 8. Докажем, что функция $\operatorname{tg} x$ непрерывна при всех значениях x , кроме значений вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Р е ш е н и е. Так как $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, а функции $\sin x$ и $\cos x$ непрерывны при всех значениях x , то и функция $\operatorname{tg} x$ непрерывна при всех тех значениях x , при которых $\cos x$ не обращается в нуль, т. е. при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Аналогично доказывается непрерывность функции $\operatorname{ctg} x$ при всех x , кроме $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

48. Предел композиции функций. Непрерывность композиции функций. При вычислении пределов часто приходится отыскивать пределы композиции функций. В основе вычисления таких пределов лежит следующая теорема:

Т е о р е м а 2.9. Пусть функция $g \circ f$ определена на множестве X и a — предельная точка этого множества. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ и функция g непрерывна в точке b , то предел функции $g \circ f$ при $x \rightarrow a$ равен $g(b)$:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in X}} g(f(x)) = g(b). \quad (1)$$

Равенство (1) можно иначе записать в виде

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in X}} g(f(x)) = g\left(\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in X}} f(x)\right).$$

Кратко его формулируют так: *под знаком непрерывной функции можно выполнить предельный переход.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ради простоты проведем доказательство для случая, когда множество X содержит некоторую проколотую окрестность точки a . В этом случае равенство (1) принимает более простой вид

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(b).$$

Чтобы доказать это равенство, зададим $\varepsilon > 0$. Так как функция g непрерывна в точке b , то найдется окрестность $U(b, \lambda)$ этой точки такая, что $g(U(b, \lambda)) \subset U(g(b), \varepsilon)$. Далее, поскольку $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$,

найдется проколотая окрестность $\dot{U}(a, \delta)$ точки a , такая, что $f(\dot{U}(a, \delta)) \subset U(b, \lambda)$.

Но тогда имеем

$$g(f(\dot{U}(a, \delta))) \subset g(U(b, \lambda)) \subset U(g(b), \varepsilon).$$

Итак, для любого равенства $\varepsilon > 0$, существует такое $\delta > 0$, что

$$g(f(\dot{U}(a, \delta))) \subset U(g(b), \varepsilon).$$

А это значит, что $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(b)$.

В общем случае доказательство проводится аналогично лишь с некоторым усложнением записи — надо отмечать, что $x \in X$, $f(a) \in f(X)$ и т. д.

С л е д с т в и е. Если функция f непрерывна в точке a , а функция g непрерывна в точке $b = f(a)$, то композиция $g \circ f$ этих функций непрерывна в точке a .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если a — изолированная точка для области задания X функции $g \circ f$, то эта функция непрерывна в точке a . Если же a — предельная точка для X , то в силу непрерывности функции f в точке a имеем: $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in X}} f(x) = f(a)$.

Так как функция g непрерывна в точке $b = f(a)$, то по теореме 2 получаем, что $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = g(\lim_{x \rightarrow a} f(x)) = g(f(a)) = (g \circ f)(a)$.

Это и означает, что функция $g \circ f$ непрерывна в точке a .

Т е о р е м а 3.9. Пусть $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x \in X}} f(x) = b$ и функция g непрерывна в точке b . Тогда $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x \in X}} g(f(x)) = g(b)$.

Эта теорема доказывается аналогично теореме 2.9.

Условие непрерывности функции g можно заменить условием существования предела $\lim_{t \rightarrow b} g(t) = C$, однако при этом надо предположить, что в некоторой проколотой окрестности точки значения функции f отличны от b . Доказательство в этом случае также аналогично доказательству теоремы 2.9.

Применяя теорему 3.9 для случая $X = \mathbb{N}$, получаем

С л е д с т в и е. Пусть функция g непрерывна в точке b и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) = g(b)$.

Например, поскольку функция $\sin x$ непрерывна на всем множестве \mathbb{R} , получаем: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{n^3 + 1}\right) = \sin\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{n^3 + 1}\right)\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

П р и м е р 9. Докажем, что функция $\sin(x^3 + 9)$ непрерывна при всех значениях x .

Р е ш е н и е. Функция $\sin(x^3 + 9)$ является композицией функций f и g , где $f(x) = x^3 + 9$, $g(x) = \sin x$. Но $\sin x$ и $x^3 + 9$ непрерывны при всех значениях аргумента. Значит, и функция $\sin(x^3 + 9)$ непрерывна при всех значениях аргумента.

49. Свойства функций, непрерывных в точке. Нам понадобятся в дальнейшем некоторые свойства функций, непрерывных в точке. Для простоты ограничимся случаем, когда функция определена в некоторой окрестности рассматриваемой точки.

Если функция f непрерывна в точке a и положительна в этой точке, то в достаточной близости от точки a значения функции мало отличаются от $f(a)$ и потому тоже положительны. Аналогично если непрерывная в a функция отрицательна в этой точке, то она отрицательна и вблизи от этой точки. Иными словами, справедлива следующая теорема:

Теорема 4.9. Если функция f непрерывна в точке a и $f(a) > 0$, то существует окрестность точки a , для всех точек которой справедливо неравенство $f(x) > 0$.

Доказательство. Выберем ε так, чтобы было $0 < \varepsilon < f(a)$. Так как функция f непрерывна в точке a , то существует $\delta > 0$, такое, что для $x \in U(a, \delta)$ справедливо неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, или, что то же самое, $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$. Так как $f(a) - \varepsilon > 0$, то отсюда следует, что $f(x) > 0$ на множестве $U(a, \delta)$, что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается и следующая теорема:

Теорема 5.9. Если функция f непрерывна в точке a и $f(a) < 0$, то существует окрестность точки a , для всех точек которой справедливо неравенство $f(x) < 0$.

Заметим, что если $f(a) = 0$, то слева и справа от a функция может иметь любые знаки. Например, функция $(x - a)^2$ положительна и слева, и справа от a (рис. 74, а), а функция $(x - a)^3$ положительна при $x > a$ и отрицательна при $x < a$ (рис. 74, б).

Для разрывных функций теоремы 4.9 и 5.9 перестают быть верными. Например, зная, что разрывная функция положительна в точке a , нельзя ничего сказать о ее знаке в окрестности этой точки. Так, функция f , где

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4, & x < 3, \\ x + 5, & x \geq 3, \end{cases}$$

положительна при $x = 3$ ($f(3) = 3 + 5 = 8$). Но при $x < 3$ имеем $f(x) = -x^2 - 4 < 0$, а потому в любой окрестности точки $x = 3$ есть и положительные, и отрицательные значения функции (рис. 75).

Теорема 6.9. Если функция f непрерывна в точке a , то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

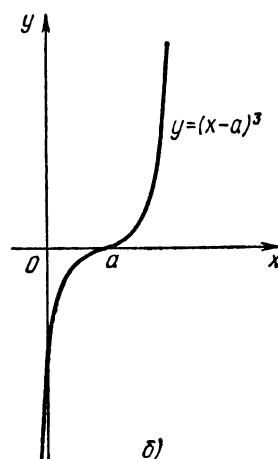
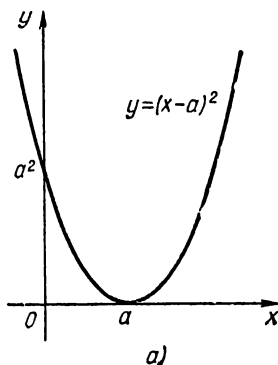


Рис. 74

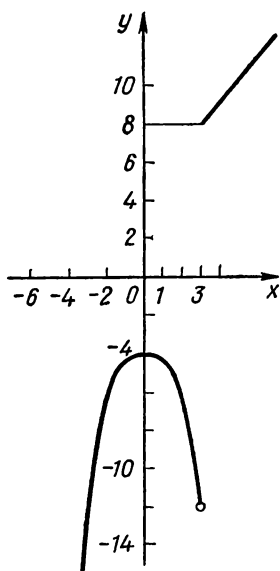


Рис. 75

Доказательство. В силу непрерывности функции f при $x = a$ имеем $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Но функция, имеющая предел, когда $x \rightarrow a$, ограничена в некоторой окрестности точки a (см. п. 42).

50. Точки разрыва функции. Перейдем к рассмотрению точек разрыва функции, т. е. точек, в которых не выполняется свойство непрерывности. Более точно понятие точки разрыва определяется следующим образом.

О п р е д е л е н и е 5.9. Пусть функция f определена на множестве X и a — предельная точка этого множества. Точка a называется *точкой разрыва* этой функции, если $f(a)$ не является пределом функции f , когда $x \rightarrow a$ (по множеству X).

Таким образом, предельная точка a множества X может быть точкой разрыва функции f , заданной на множестве X , в следующих случаях:

- а) $a \notin X$;
- б) $a \in X$, но $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in X}} f(x)$ не существует;

- в) $a \in X$ и существует $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in X}} f(x)$, но этот предел отличен от $f(a)$.

Отметим важнейшие типы точек разрыва.

1. **Устранимый разрыв.** Если существует $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in X}} f(x)$, но значение

предела отлично от $f(a)$, то разрыв можно устранить, изменив значение функции лишь в точке a , т. е. заменив функцию f функцией F , где

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a, \\ \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in X}} f(x), & x = a. \end{cases}$$

Поскольку эта операция сводится к изменению значения функции лишь в одной точке a , то разрывы описанного вида называют *устраняемыми*.

На рисунке 76 изображен график функции, имеющей устранимый разрыв.

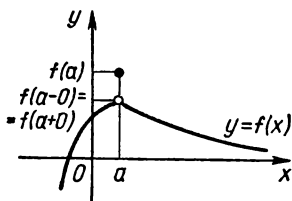


Рис. 76

Пример 10. Функция f , где

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}, & \text{если } x \neq 8, \\ 0, & \text{если } x = 8, \end{cases}$$

имеет устранимый разрыв в точке $a = 8$, так как $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} = 12$ (см. с. 113). Чтобы устранить этот разрыв, достаточно заме-

нить f функцией F , где $F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \neq 8, \\ 12, & \text{если } x = 8. \end{cases}$

Аналогично устраняется разрыв, если $a \notin X$, но существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

2. Разрыв первого рода или скачок. Точка a называется *точкой разрыва первого рода*, если существуют односторонние пределы $f(a-0)$, $f(a+0)$, но $f(a-0) \neq f(a+0)$. Разность $f(a+0) - f(a-0)$ называют *величиной скачка в точке a* .

Пример 11. Рассмотрим функцию f , где

$$f(x) = \begin{cases} 7x + 2, & x \leq 3, \\ x^3 + 3, & x > 3. \end{cases}$$

Единственной точкой разрыва здесь может быть «точка стыка» двух выражений, задающих функцию, т. е. $x = 3$. Мы имеем:

$$f(3-0) = \lim_{x \rightarrow 3} (7x + 2) = 23,$$

$$f(3+0) = \lim_{x \rightarrow 3} (x^3 + 3) = 12.$$

Оба предела $f(3-0)$ и $f(3+0)$ существуют, но различны. Значит, $x = 3$ — точка разрыва первого рода. Величина скачка равна $12 - 23 = -11$.

Справедлива следующая

Теорема 7.9. Пусть функция f монотонна на промежутке X и $c \in X$ — точка разрыва функции f . Тогда c — точка разрыва первого рода.

Доказательство. Будем считать для определенности, что $X =]a; b[$ и что f — возрастающая функция. На интервале $]a; c[$ функция f монотонна и ограничена сверху (например, значением $f(c)$), значит, по теореме из п. 32 существует $f(c-0)$. На интервале $]c; b[$ функция монотонна и ограничена снизу (например, значением $f(c)$), значит, по той же теореме существует $f(c+0)$.

Так как $f(c-0)$ и $f(c+0)$ существуют, то c — точка разрыва первого рода.

Геометрическая иллюстрация доказанной теоремы представлена на рисунке 77.

3. Точки разрыва второго рода. Точка a называется *точкой разрыва второго рода*, если хотя бы один из пределов $f(a-0)$, $f(a+0)$ не существует.

Чаще всего этот случай встречается тогда, когда функция неограничена в любой окрестности точки a . Примером такой точки может служить $x = 0$ для функции f , где $f(x) = \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$. Вообще, если функция f может быть записана в виде $\frac{\varphi}{\psi}$, где функции φ и ψ непрерывны в точке a и $\psi(a) \neq 0$,

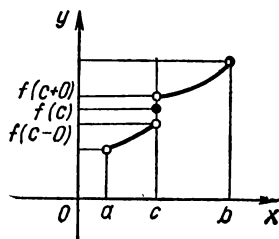


Рис. 77

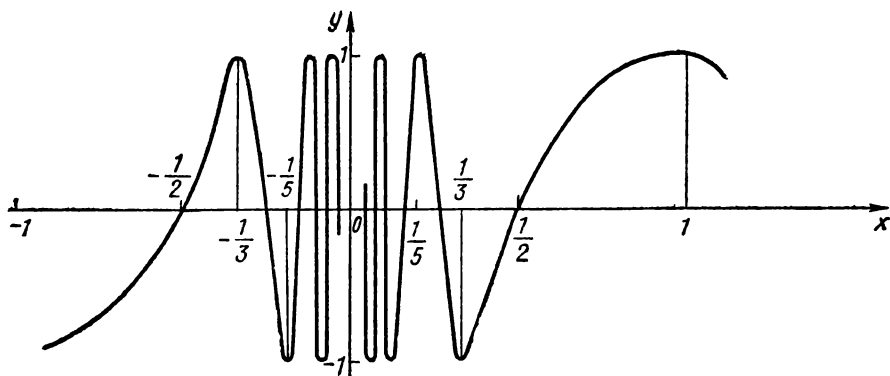


Рис. 78

$\psi(a) = 0$, то в любой окрестности точки a функция f не ограничена. Это следует из того, что в этом случае $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

Пример 12. Точки $-4, 4, 6$ являются точками разрыва второго рода для функции $\frac{1}{(x-6)(x^2-16)}$, как бы мы ни определяли ее значения в этих точках. В любой окрестности каждой из этих точек функция не ограничена.

Однако существуют функции, ограниченные в какой-либо окрестности точки a , для которых $f(a-0)$ или $f(a+0)$ не существует.

Рассмотрим функцию f , где

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{2x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рисунке 78. В п. 38 было показано, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{2n}\right) = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{4n+1}\right) = 1$. Отсюда следует, что функция f не имеет предела, когда x приближается к нулю справа (у нее нет и предела, когда x приближается к нулю слева). Значит, $x = 0$ — точка разрыва второго рода для функции f .

Вопросы для самопроверки

1. Приведите два примера непрерывно меняющихся величин и два примера величин, меняющихся скачкообразно.

2. Пусть $V(t)$ — объем воды как функция ее температуры. При каких значениях t эта функция меняется скачкообразно?

3. Как меняется сила тока в цепи при включении с помощью выключателя и с помощью реостата? В каком случае изменение плавное, а в каком скачкообразно?

4. Сформулируйте определение непрерывности функции в точке «на языке бесконечно малых», «на языке пределов», «на языке ε - δ », «на языке окрестностей».

5. Можно ли в определении непрерывности функции «на языке ε - δ » заменить условие $\varepsilon > 0$ на $\varepsilon \geq 0$?

6. Можно ли в определении непрерывности функции заменить условие $\delta > 0$ на $\delta \geq 0$?

7. Можно ли в определении непрерывности функции заменить неравенства $|x - a| < \delta$ и $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ на $|x - a| \leq \delta$ и $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$?

8. Можно ли в определении непрерывности вместо слов «для любого $\varepsilon > 0$ » использовать слова «найдется $\varepsilon > 0$ »? Ответ поясните примером.

9. Можно ли, давая определение непрерывности, вместо «найдется $\delta > 0$ » сказать «для любого $\delta > 0$ »? Ответ поясните примером.

10. В каком случае функция f считается непрерывной в точке a , если область задания функции не содержит никакой окрестности точки a ?

11. Почему функция считается непрерывной в изолированной точке области задания?

12. Функция задана на отрезке $[a; b]$. В каком случае она считается непрерывной в точке a ? непрерывной в точке b ?

13. Что означает предложение «функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$ »?

14. Сформулируйте теоремы об арифметических операциях над непрерывными функциями.

15. В каком случае справедливо равенство $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow a} f(x))$?

16. Сформулируйте теорему о непрерывности композиции функций.

17. Можно ли утверждать что-либо о знаке функции f в достаточно малой окрестности точки a , если в этой точке она непрерывна и равна нулю?

18. Можно ли утверждать что-либо о знаке функции f в достаточно малой окрестности точки a , если в этой точке она положительна и разрывна?

19. Можно ли утверждать что-либо о знаке функции f в достаточно малой окрестности точки a , если она в этой точке положительна и непрерывна?

20. Какие существуют типы точек разрыва?

21. Как устранить разрыв в точке устранимого разрыва?

22. Что называют скачком функции в точке a ? Когда он существует?

Упражнения

153. Найдите такое $\delta > 0$, чтобы из неравенства $|x - 4| < \delta$ вытекало неравенство:

а) $|x^2 - 16| < 20$; б) $|x^2 - 16| < 1$; в) $|x^2 - 16| < 0,001$; г) $|x^2 - 16| < \varepsilon$.

154. Найдите такое $\delta > 0$, чтобы из неравенства $|x - 2| < \delta$ вытекало неравенство $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right| < 0,001$.

155. Найдите такое $\delta > 0$, чтобы из неравенства $|x - a| < \delta$ вытекало неравенство $|x^3 - a^3| < 0,01$. Рассмотрите случаи $a = 0$, $a = 1$.

156. Найдите такое $\delta > 0$, чтобы при $|x - a| < \delta$ имело место неравенство $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| < \varepsilon$, если:

а) $a = 10$, $\varepsilon = 0,001$; б) $a = 1$, $\varepsilon = 0,001$;

в) $a = 0,01$, $\varepsilon = 0,01$.

157. Докажите непрерывность функции f , если:

а) $f(x) = \frac{x+4}{3-2x}$, $x \in]-\infty; 1[$;

б) $f(x) = \sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$;

в) $f(x) = \operatorname{tg} 3x$, $x = \frac{\pi}{4}$;

г) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 4}$, $x \in \mathbb{R}$;

д) $f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{x^2 - 7x + 10}$, $x \in]2; 5[$;

е) $f(x) = \cos(ax + b)$, $x \in \mathbb{R}$;

ж) $f(x) = \frac{x^2 \cos x}{4 + \sin^2 x}$, $x \in \mathbb{R}$.

158. Вычислите предел и объясните, каким свойством тригонометрических функций при этом воспользовались:

а) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \cos 2x$;

б) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (\cos^3 x + \sin^3 x)$;

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin x + \cos x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x^2\right).$$

159. Найдите и исследуйте точки разрыва функции:

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{3}{x}; \quad \text{б) } \frac{1}{x^2 - 4}; \quad \text{в) } \frac{x^2 - 1}{x^3 - 8}; \quad \text{г) } \frac{x - 1}{|x - 1|}; \\ \text{д) } \frac{x^3 - 5x + 6}{x^2 - 4}; \quad \text{е) } \frac{x}{\sin x - \cos x}; \quad \text{ж) } \cos \frac{\pi}{x}. \end{aligned}$$

160. Докажите, что для функции Дирихле (см. с. 35) каждая точка является точкой разрыва второго рода.

161. Найдите окрестность точки $x = 2$, в которой функция $x^3 + 4x - 10$ имеет положительные значения. Почему до решения задачи можно быть уверенным, что такая окрестность существует?

162. Вычислите предел последовательности:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{n^2}{n^3 + 1}\right); \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{n^4}{n^5 + 1}\right); \\ \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}; \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{n^3 + 1}{n^4 + 2}\right). \end{aligned}$$

163. Найдите точки разрыва функции f , исследуйте их характер, изобразите график функции в окрестности точки разрыва, если:

$$\begin{aligned} \text{а) } f(x) = \frac{1}{x^2(x-1)}; \quad \text{б) } f(x) = \frac{x^3 + x}{2|x|}; \quad \text{в) } f(x) = \frac{x^3 - x^2}{2|x-1|}; \\ \text{г) } f(x) = \frac{2 - \sqrt{1+x}}{4 - x^2}; \quad \text{д) } f(x) = \frac{\cos x}{|x|}. \end{aligned}$$

В следующих задачах исследуйте функции на непрерывность, найдите точки разрыва и установите их характер, постройте эскиз графика функции f , заданной своим выражением $f(x)$:

$$164. \text{ а) } f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1}, & x \neq 1, \\ 4, & x = 1. \end{cases}$$

$$165. \text{ а) } f(x) = \frac{|x|}{x}; \quad \text{б) } f(x) = \frac{2x - 3}{|2x - 3|}.$$

$$166. \text{ а) } f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1, \\ x + 2, & x > 1; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1, \\ x^2 + 4, & x > 1. \end{cases}$$

$$167. \text{ а) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{x^2 + 1}{x}, & x \geq 1, \\ x, & x < 0; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ \operatorname{tg} x + 1, & x > 0. \end{cases}$$

$$168. \text{ а) } f(x) = \begin{cases} 2 \operatorname{tg} x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{4}, \\ 3, & x = \frac{\pi}{4}, \\ \frac{8x}{\pi}, & \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2}; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 1, \\ -x^2 + 2x, & 1 \leq x \leq 3, \\ 0, & x \geq 3. \end{cases}$$

$$169. \text{ а) } f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{4}, \\ 1, & x = \frac{\pi}{4}, \\ x^2 - \frac{\pi^2}{16}, & \frac{\pi}{4} < x \leq \pi; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < \pi, \\ x - \pi, & \pi \leq x < 2\pi, \\ \cos x, & x \geq 2\pi. \end{cases}$$

§ 10. ТЕХНИКА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИЙ

51. Предел непрерывной функции. Простейшие случаи раскрытия неопределенностей. В этом параграфе мы будем говорить о вычислении пределов, связанных только с рациональными, иррациональными и тригонометрическими функциями.

Выше мы установили непрерывность постоянной функции C , тождественной функции x , функций $\sin x$, $\cos x$ в любой точке числовой прямой, а также функции $\sqrt[n]{x}$ при $x \geq 0$. Кроме того, было доказано, что любая функция, получающаяся из вышеперечисленных с помощью конечного числа арифметических операций, непрерывна во всех точках своей области определения. В частности, любая рациональная функция, функции $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ непрерывны всюду, где они определены. Наконец, непрерывны в своей области определения композиции любых вышеперечисленных функций.

Если функция f непрерывна в точке a , то выполняется равенство $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (см. п. 46).

Пример 1. Вычислим предел

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + \sqrt{x} - 3x - 1}{x + 1}.$$

Решение. Функция f , где $f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x} - 3x - 1}{x + 1}$, определена в точке $x = 1$, следовательно, она непрерывна в этой точке, а потому искомый предел равен $f(1)$, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + \sqrt{x} - 3x - 1}{x + 1} = \frac{1^2 + \sqrt{1} - 3 - 1}{1 + 1} = -1.$$

Пусть функция задана выражением вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Если $\lim_{x \rightarrow a} Q(x) = 0$, то вышеописанный метод вычисления предела при $x \rightarrow a$ использовать нельзя.

В случае, когда $\lim_{x \rightarrow a} Q(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow a} P(x) \neq 0$, имеем:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \infty.$$

В самом деле, поскольку $\lim_{x \rightarrow a} \frac{Q(x)}{P(x)} = 0$, то функция $\frac{P(x)}{Q(x)}$ является бесконечно большой при $x \rightarrow a$ (см. п. 46.) Сложнее обстоит дело, если и $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = 0$, и $\lim_{x \rightarrow a} Q(x) = 0$. В этом случае $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$ может

быть равным, как мы увидим ниже, любому числу, а также ∞ . Выражения вида $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = \lim_{x \rightarrow a} Q(x) = 0$, называют *неопределенностями вида* $\frac{0}{0}$. Если $P(x)$ и $Q(x)$ непрерывны в точке a и при этом $P(a) = Q(a) = 0$, то выражение $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$ является неопределенностью.

Для вычисления таких пределов (или, как говорят, для раскрытия неопределенности) применяют следующий метод: заменяют дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ дробью $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, тождественно равной $\frac{P(x)}{Q(x)}$ при $x \neq a$, но такой, что хотя бы одно из чисел $P_1(a)$, $Q_1(a)$ было отлично от нуля. Так как значение функции при $x = a$ не играет роли при вычислении пределов (см. с. 71), то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

Пример 2. Вычислим предел

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}.$$

Решение. При $x = 3$ и числитель, и знаменатель обращаются в нуль. Для раскрытия получившейся неопределенности вида $\frac{0}{0}$ разложим числитель и знаменатель на множители и сократим дробь. Получим:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x+3}.$$

Поскольку функция f , где $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$, непрерывна в точке $x = 3$, ее предел при $x \rightarrow 3$ равен $f(3)$, т. е. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x+3} = \frac{3-2}{3+3} = \frac{1}{6}$.

Итак,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \frac{1}{6}.$$

Пример 3. Вычислим предел

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{x^2 - 16}.$$

Решение. Здесь также имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, что позволит избавиться от иррациональности в числителе, а затем сократим дробь. Получим:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5}-3}{x^2-16} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)}{(x^2-16)(\sqrt{x+5}+3)} = \\&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x+5})^2-9}{(x+4)(x-4)(\sqrt{x+5}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(x+4)(x-4)(\sqrt{x+5}+3)} = \\&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(x+4)(\sqrt{x+5}+3)} = \frac{1}{(4+4)(\sqrt{4+5}+3)} = \frac{1}{48}.\end{aligned}$$

Во многих случаях при вычислении пределов полезно иметь в виду, что

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} f(a+t).$$

Пример 4. Вычислим предел

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x + 4}{x^3 - 7x^2 + 20}.$$

Решение. Полагая $x = 2 + t$, получаем, что

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x + 4}{x^3 - 7x^2 + 20} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(2+t)^3 - 6(2+t) + 4}{(2+t)^3 - 7(2+t)^2 + 20} = \\&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{8 + 12t + 6t^2 + t^3 - 12 - 6t + 4}{8 + 12t + 6t^2 + t^3 - 28 - 28t - 7t^2 + 20} = \\&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{6t + 6t^2 + t^3}{-16t - t^2 + t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{6 + 6t + t^2}{-16 - t + t^2} = -\frac{6}{16} = -\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

52. Предел функции $\frac{\sin x}{x}$ при $x \rightarrow 0$. При вычислении пределов

тригонометрических функций важную роль играет следующий предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Так как x (рис. 79) — радианная мера угла POT , то длина дуги AB равна $2|x|$, а длина хорды AB равна $2|\sin x|$. При достаточно малых значениях x хорда и дуга почти сливаются, т. е. длина хорды становится почти равной длине дуги, и потому отношение длины хорды к длине стягиваемой ею дуги стремится к единице при $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Это рассуждение не является, конечно, строгим доказательством теоремы.

Теорема 1.10. *Имеет место равенство*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (1)$$

Доказательство. Докажем сначала, что при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ выполняется

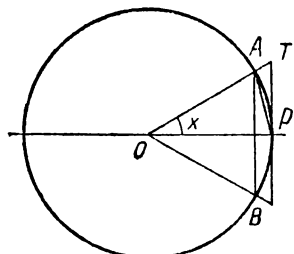


Рис. 79

неравенство $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.

На рисунке 79 рассмотрим треугольники AOP , POT и сектор AOP . Так как $\triangle AOP \subset \text{сектор } AOP \subset \triangle POT$, то

$$S_{\triangle AOP} < S_{\text{сект. } AOP} < S_{\triangle POT}.$$

При этом

$$S_{\triangle AOP} = \frac{1}{2} R^2 \sin x,$$

$$S_{\triangle POT} = \frac{1}{2} |PO| \cdot |PT| = \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x, \quad S_{\text{сект. } AOP} = \frac{R^2 x}{2}.$$

Мы доказали, что при $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$ выполняются неравенства

$$\frac{1}{2} R^2 \sin x < \frac{1}{2} R^2 x < \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x.$$

После сокращения на $\frac{1}{2} R^2$ и деления на $\sin x$ имеем:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

или, что то же самое,

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \quad (2)$$

Итак, неравенство (2) доказано при $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$. Оно верно и при $x \in]-\frac{\pi}{2}; 0[$, так как $\frac{\sin x}{x}$ и $\cos x$ — четные функции.

Но $\cos x$ — непрерывная функция, значит, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$.

Поэтому в силу теоремы о пределе промежуточной функции

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \text{ Равенство (1) доказано.}$$

Пример 5. Вычислим предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Решение. Имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Пример 6. Вычислим предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{4x}$.

Решение. Перепишем этот предел так:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}.$$

Поскольку $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{4x} = \frac{3}{4}.$$

Пример 7. Вычислим предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

Решение. Так как $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$, а $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$, то имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Пример 8. Вычислим предел $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{2(\pi - x)}$.

Решение. Положим $\pi - x = t$. Тогда $x = \pi - t$ и $\lim_{x \rightarrow \pi} t = 0$.
 $= \lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) = 0.$

Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{2(\pi - x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 3(\pi - t)}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 3t}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 3t}{3t} \cdot \frac{3t}{2t} = \frac{3}{2}.$$

53. Порядок бесконечно малых. Эквивалентные бесконечно малые.

Если функции α и β бесконечно малы при $x \rightarrow a$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ (неопределенность вида $\frac{0}{0}$) может равняться либо нулю, либо бесконечности, либо какому-нибудь числу, отличному от нуля; наконец, он может не существовать.

Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то при стремлении x к a функция α быстрее стремится к нулю, чем β . Говорят, что α — *бесконечно малая более высокого порядка, чем β* .

Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то α — *бесконечно малая более низкого порядка, чем β* .

Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0$, то α и β — *бесконечно малые одного и того же порядка*.

Особенно важен частный случай, когда $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. В этом случае α и β называются *эквивалентными бесконечно малыми* (при $x \rightarrow a$). Пишут: $\alpha \sim \beta$.

Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не существует, то α и β называют *несравнимыми бесконечно малыми*.

Функция $x - a$ при $x \rightarrow a$ называется *бесконечно малой первого порядка*. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{(x-a)^k} = c \neq 0$, то бесконечно малую α называют *бесконечно малой порядка k* .

Пример 9. Если $n > m$, то $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{x^m} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-m} = 0$, и потому x^n — бесконечно малая при $x \rightarrow 0$ более *высокого* порядка, чем x^m (x^n — бесконечно малая n -го порядка, x^m — m -го порядка).

Пример 10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ (см. пример 7). Поэтому $1 - \cos x$ и $\frac{1}{2}x^2$ — бесконечно малые одного и того же порядка при $x \rightarrow 0$. Отсюда следует, что $1 - \cos x$ — бесконечно малая второго порядка по сравнению с x .

Из равенств

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1}{2}x^2} = 1$$

следует, что при $x \rightarrow 0$ функции $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ являются бесконечно малыми, эквивалентными x , а функция $1 - \cos x$ эквивалентна функции $\frac{1}{2}x^2$:

$$\sin x \sim x, \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} x \sim x, \quad (4)$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2. \quad (5)$$

Справедливо более общее утверждение: если функция $f(x)$ бесконечно мала при $x \rightarrow a$, то

$$\sin f(x) \sim f(x), \quad \operatorname{tg} f(x) \sim f(x), \quad 1 - \cos f(x) \sim \frac{1}{2}f^2(x).$$

При вычислении пределов весьма полезной оказывается следующая теорема:

Теорема 2.10. Если при $x \rightarrow 0$ функции $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$ бесконечно малы и $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)},$$

либо оба предела не существуют.

Доказательство. По условию теоремы имеем:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\beta_1(x)} = 1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} = \\ &= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot 1 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}. \end{aligned}$$

Таким образом, при вычислении предела отношения бесконечно малых можно заменять и числитель, и знаменатель эквивалентными бесконечно малыми функциями.

Пример 11. Вычислим предел $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} 5x \cdot \sin 3x$.

Решение. Имеем $\operatorname{ctg} 5x = \frac{1}{\operatorname{tg} 5x}$. Так как $\sin 3x \sim 3x$, $\operatorname{tg} 5x \sim 5x$ при $x \rightarrow 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} 5x \sin 3x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}.$$

Замечание. Так как $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} 5x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 3x = 0$, то данный предел относится к случаю, который называется неопределенностью вида $\infty \cdot 0$. Такую неопределенность всегда можно свести к неопределенности вида $\frac{0}{0}$, что мы и сделали в рассмотренном примере.

Пример 12. Вычислим предел $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 7x}{\sin 4x}$.

Решение. Сделаем замену переменной $x = \pi + t$. Если $x \rightarrow \pi$, то $t \rightarrow 0$. Поэтому имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 7x}{\sin 4x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 7(\pi + t)}{\sin 4(\pi + t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin (7\pi + 7t)}{\sin (4\pi + 4t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin 7t}{\sin 4t} = \\ &= -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{7t}{4t} = -\frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Вопросы для самопроверки

1. Всегда ли выполняется равенство $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$?
2. Что такое неопределенность вида $\frac{0}{0}$? Как она раскрывается при вычислении пределов?
3. Какие бесконечно малые называются эквивалентными?
4. Приведите примеры эквивалентных бесконечно малых при $x \rightarrow 0$; при $x \rightarrow \pi$; при $x \rightarrow \infty$.
5. Как используются эквивалентные бесконечно малые при вычислении пределов?
6. Докажите, что если $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \rightarrow a$, то $\alpha(x) - \beta(x)$ имеет при $x \rightarrow a$ более высокий порядок малости, чем $\alpha(x)$.

Упражнения

Вычислите предел функции:

$$170. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 + 3x^2 - x - 2}; \quad \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 2 \operatorname{ctg} x}{(\pi - x) \sin \frac{x}{3}}.$$

$$171. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 8x + 12}; \quad \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 - x + 2};$$

- в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^6 - x^3 + x^2 - x}$; г) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 + 5x + 4}{x^3 - x^2 - 3x - 1}$.
172. а) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x^2 - 9}$; в) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4+x+x^2} - 2}{x^2 - 1}$.
173. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{2-x} - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{\sqrt{x^2+16} - 4}$.
174. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}}{x^2 - x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^3}}{1 - \sqrt{1+x}}$.
175. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x+1} - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{1+x}}{x^2 + x}$.
176. а) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - 1 - \cos 2x}{\sin x - \cos x}$;
- в) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x + 1}{\cos x + \sin x - 1}$; г) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg}^3 x}$.

177. Какие из следующих бесконечно малых при $x \rightarrow 0$ имеют тот же порядок, что и x , какие — более высокий порядок, а какие — более низкий:

- а) $\sin 5x$; б) $\sin 5x \cdot \operatorname{tg} 3x$; в) \sqrt{x} ;
 г) $x^3 + 6x^2$; д) $3\sqrt[3]{x} + 4\sqrt[4]{x}$; е) $1000x\sqrt{x}$;
 ж) $\operatorname{tg}^3 x$; з) $\sqrt[3]{\sin 6x}$; и) $1 - \cos 5x$?

178. Обозначим через x радианную меру центрального угла, через l — длину соответствующей хорды, через S — площадь соответствующего сектора, через s — площадь соответствующего сегмента, через h — длину стрелки этого сегмента. Какие из величин l, S, s, h имеют при $x \rightarrow 0$ тот же порядок малости, что и x , а какие — более высокий?

Вычислите следующие пределы:

179. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{6x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 10x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{15x}$;
- г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 7x}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{ctg} 4x \sin 5x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{6x^2}$.
180. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{x^2}$; в) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}$; г) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.
181. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{\sin^2 4x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x \sin 5x}{(1 - \cos 4x) \operatorname{tg} 2x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x \sin^2 5x}{x^3 \sin 4x}$.
182. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 2x}{\sin x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{\cos 2x - \cos 8x}$.
183. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\operatorname{tg}^2 x + 1 - \cos 2x}$.
184. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3 \sin^2 x + x \operatorname{tg} 5x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x - \sin 2x}$.

$$185. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sqrt{x+4} - 2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} 3x (\sqrt{x+9} - 3); \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{\sin 4x}.$$

$$186. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg}(x-1)}{x^2 - 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sin(1-2x)}{4x^2 - 1}.$$

$$187. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\pi - x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}.$$

$$188. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3} - 2 \cos x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

$$189. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^3 4x}{\operatorname{tg}^3 5x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 7x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2 \operatorname{ctg} 3x}.$$

$$190. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1 - \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}}{\sin 2x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}.$$

191. Найдите односторонние пределы функции f при $x \rightarrow a$, если:

$$\text{а) } f(x) = \frac{\sin x}{|x|}, \quad a = 0; \quad \text{б) } f(x) = \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}, \quad a = 0;$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{4x - 4}{\sqrt{\sin^2(x-1)}}, \quad a = 1; \quad \text{г) } f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 3}{\sqrt{x^2 - 16x + 64}}, \quad a = 8.$$

192. Функция f не определена в точке $x = 0$. Постройте функцию F , где $F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0, \\ A, & x = 0, \end{cases}$ так, чтобы функция F была непрерывной в точке $x = 0$:

$$\text{а) } f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}; \quad \text{б) } f(x) = \frac{\sin x + \sin 3x}{\operatorname{tg} x}; \quad \text{в) } f(x) = \frac{3 \sin^2 x}{\sqrt{1+x^2} - 1}.$$

§ 11. СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

54. **Теорема о промежуточном значении.** Функции, непрерывные на отрезке, обладают рядом важных свойств, которые будут изучены в этом параграфе.

Теорема 1.11 (о нуле непрерывной функции). Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на концах этого отрез-

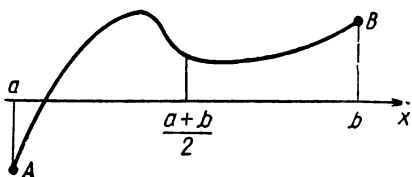


Рис. 80

ка значения разных знаков. Тогда найдется точка отрезка $[a; b]$, в которой эта функция обращается в нуль.

Доказательство. Предположим для определенности, что $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$ (рис. 80). Разделим отрезок $[a; b]$ пополам. Если в точке $\frac{a+b}{2}$ функция f равна ну-

лю, $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, то теорема доказана.

В противном случае на концах одной из половин функция принимает значения разных знаков (на концах половины $\left[a; \frac{a+b}{2}\right]$, если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$, и на концах половины $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$, если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$). Разделим снова пополам ту половину, на концах которой функция имеет значения разных знаков, и продолжим этот процесс далее. Возможны два случая:

а) В ходе последовательных делений получаем точку, в которой функция обращается в нуль. Тогда теорема доказана.

б) Получаем бесконечную последовательность отрезков $[a; b]$, $[a_1; b_1]$, ..., $[a_n; b_n]$, ... вложенных друг в друга и таких, что $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$. По теореме о стягивающейся системе отрезков (теореме 5.7) найдется точка c , принадлежащая всем этим отрезкам. При этом $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$.

Так как в точке c функция f непрерывна, то $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(c)$ (см. следствие из теоремы 3.9). Поскольку для любого n имеем $f(a_n) < 0$, то $f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0$. Аналогично из соотношений $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(c)$ и $f(b_n) > 0$ получаем, что $f(c) \geq 0$. Но неравенства $f(c) \leq 0$ и $f(c) \geq 0$ могут одновременно выполняться, лишь когда $f(c) = 0$. Теорема доказана.

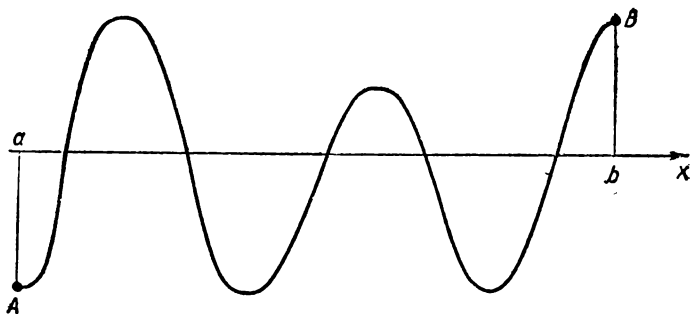
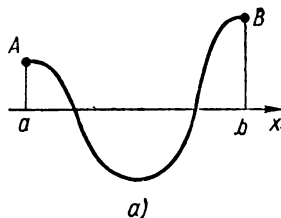


Рис. 81

Доказанное утверждение геометрически очевидно: ось абсцисс делит координатную плоскость на две полуплоскости; если $f(a) < 0$, а $f(b) > 0$, то точки $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$ лежат в разных полуплоскостях, и потому непрерывная линия, соединяющая точки A и B , обязательно пересечет ось абсцисс хотя бы один раз (рис. 81).



Отметим, что если $f(a)$ и $f(b)$ имеют одинаковые знаки, то функция f на отрезке $[a; b]$ может как обращаться (рис. 82, а), так и не обращаться в нуль (рис. 82, б).

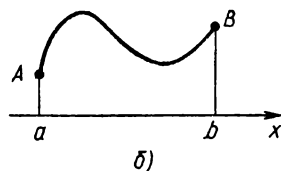


Рис. 82

Укажем также, что при выполнении условий теоремы 1.11 функция f может несколько раз обратиться в нуль. Однако если функция f монотонна на $[a; b]$, то существует не более одной точки c , такой, что $f(c) = 0$ (если f возрастает, при $x < c$ имеем $f(x) < f(c) = 0$, а при $x > c$ получаем $f(x) > f(c) = 0$). Итак, справедливо такое следствие из теоремы 1.11:

С л е д с т в и е. Если функция f непрерывна и монотонна на отрезке $[a; b]$, причем знаки $f(a)$ и $f(b)$ различны, то на $[a; b]$ есть одна и только одна точка c , такая, что $f(c) = 0$.

Доказанное следствие используют для приближенного вычисления корней уравнений. Пусть надо решить уравнение $f(x) = 0$. Если удастся найти отрезок $[a; b]$, на котором функция f непрерывна, монотонна и на концах отрезка принимает значения разных знаков, то внутри него содержится ровно один корень уравнения. Чтобы уточнить значение искомого корня, отрезок $[a; b]$ делят пополам, выбирают половину, на концах которой значения функции различны по знаку, и т. д. Таким путем получают значение корня уравнения $f(x) = 0$ с любой наперед заданной точностью.

Часто поступают так: ищут отрезок вида $[n; n + 1]$, на котором лежит корень уравнения $f(x) = 0$, делят этот отрезок на 10 равных частей, вычисляют значения функции в точках деления и смотрят, на каком из отрезков функция меняет знак. Этот отрезок снова делят на 10 равных частей и т. д. Указанный процесс позволяет находить один за другим десятичные знаки искомого корня.

П р и м е р 1. Докажем, что уравнение $x^3 + 4x + 1 = 0$ имеет корень на отрезке $[-1; 0]$, и найдем приближенное значение этого корня с точностью до 0,01.

Р е ш е н и е. Функция f , где $f(x) = x^3 + 4x + 1$, непрерывна на отрезке $[-1; 0]$, возрастает как сумма двух возрастающих функций x^3 и $4x + 1$ и принимает на концах отрезка значения разных знаков: $f(-1) = -4 < 0$, $f(0) = 1 > 0$. Значит, на отрезке $[-1; 0]$ заданное уравнение имеет один корень.

Применим для вычисления этого корня метод последовательного деления на 10 частей. Разделим отрезок $[-1; 0]$ на 10 равных частей и вычислим значения функции в точках деления. Имеем:

$f(0) = 1$; $f(-0,1) = 0,599$; $f(-0,2) = 0,192$; $f(-0,3) = -0,227$.

Получили $f(-0,3) < 0$, $f(-0,2) > 0$; значит, искомый корень лежит на отрезке $[-0,3; -0,2]$. Разделим этот отрезок на 10 равных частей и вычислим значения функции в точках деления. Имеем: $f(-0,21) \approx 0,151$; ...; $f(-0,24) \approx 0,026$; $f(-0,25) \approx -0,016$. Значит, искомый корень лежит на $[-0,25; -0,24]$, т. е. с точностью до 0,005 искомый корень равен $-0,245$.

Теорема 1.11 играет важную роль и при решении неравенств. Пусть надо решить неравенство $f(x) > 0$, где f — функция, непрерывная на всей числовой прямой. Сначала решим уравнение $f(x) = 0$. Пусть x_1, x_2, \dots, x_n — корни уравнения (множество этих корней может быть как конечным, так и бесконечным). Эти точки разбивают числовую прямую на промежутки, такие, что на концах каждого промежутка функция f обращается в нуль, а внутри отлична от нуля. Тогда внутри каждого промежутка знак функции f не меняется. В самом деле, предположим, что точки a и b лежат внутри одного промежутка, а знаки $f(a)$ и $f(b)$ различны. Тогда непрерывная функция f обратится в нуль между точками a и b , чего не может быть.

Итак, мы доказали, что корни уравнения $f(x) = 0$ разбивают числовую прямую на промежутки, внутри которых функция f сохраняет постоянный знак. Теперь достаточно взять на каждом из полученных интервалов «пробную точку» и посмотреть, какой знак имеет функция в этой точке. Тот же знак она будет иметь и на всем интервале. Это позволит отобрать те интервалы, на которых выполняется неравенство $f(x) > 0$.

Если функция f имеет точки разрыва, то при решении неравенства $f(x) > 0$ надо учесть не только корни уравнения $f(x) = 0$, но и точки разрыва функции, и посмотреть, какой знак имеет функция на каждом из полученных интервалов.

Указанный метод решения неравенств носит название *метода интервалов*.

Пример 2. Решим неравенство $\frac{(x+1)(x-1)^3(x+2)^3}{x-4} > 0$.

Решение. Функция $\frac{(x+1)(x-1)^3(x+2)^3}{x-4}$ обращается в нуль в точках $-2, -1, 1$ и разрывна в точке 4 . Эти точки разбивают числовую прямую на промежутки: $]-\infty; -2]$, $[-2; -1]$, $[-1; 1]$, $[1; 4[$, $]4; +\infty[$. На каждом из этих промежутков функция непрерывна и сохраняет постоянный знак. Беря пробные точки: $-3; -1,5; 0; 2; 5$, находим:

$$f(-3) < 0, \quad f(-1,5) < 0, \quad f(0) > 0, \quad f(2) < 0, \quad f(5) > 0.$$

Значит, $f(x) > 0$ на промежутках $]-1; 1[$ и $]4; +\infty[$. Их объединение и является решением заданного неравенства.

Теорема 1.11 является частным случаем более общей теоремы.

Теорема 2.11 (теорема о промежуточном значении). Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $f(a) \neq f(b)$. Тогда она принимает на этом отрезке любое значение μ , лежащее между $f(a)$ и $f(b)$, т. е. существует такая точка $c \in [a; b]$, что $f(c) = \mu$.

Доказательство. Положим для определенности, что $f(a) < f(b)$. Рассмотрим вспомогательную функцию F , где $F(x) = f(x) - \mu$. Эта функция непрерывна на отрезке $[a; b]$ как разность двух непрерывных функций f и μ (постоянная функция). При этом поскольку $f(a) < \mu$, то

$$F(a) = f(a) - \mu < 0,$$

а поскольку $f(b) > \mu$, то

$$F(b) = f(b) - \mu > 0.$$

Значит, функция F принимает на концах отрезка $[a; b]$ значения различных знаков. Следовательно, на этом отрезке найдется такая точка c , что $F(c) = 0$. Это означает, что $f(c) - \mu = 0$, т. е. что $f(c) = \mu$. Теорема доказана.

Следствие. Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$ и монотонна на нем, то множество ее значений представляет собой отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$.

Справедливо утверждение, обратное этому следствию.

Теорема 3.11. Если функция f возрастает (убывает) на промежутке X и множеством ее значений является промежуток Y , то эта функция непрерывна на X .

Доказательство. Если бы возрастающая функция f имела на X точку разрыва c , то эта точка была бы точкой разрыва первого рода, т. е. мы имели бы $f(c-0) < f(c)$ или $f(c) < f(c+0)$. В этом случае промежуток $]f(c-0); f(c)[$ или $]f(c); f(c+0)[$, являющийся частью Y , не содержал бы ни одной точки, являющейся значением функции f , вопреки тому, что по условию $f(X) = Y$. Полученное противоречие доказывает непрерывность функции f на X .

55. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке. На рисунке 83 изображен график функции f , непрерывной на отрезке $[a; b]$. Мы видим, что этот график целиком расположен между двумя прямыми, параллельными оси абсцисс. Иными словами, функция f ограничена. Мы докажем сейчас, что это утверждение справедливо для любой функции, непрерывной на отрезке.

Теорема 4.11. Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она ограничена на нем (т. е. существует такое число A , что $|f(x)| \leq A$ для всех $x \in [a; b]$).

Доказательство. Проведем доказательство теоремы методом от противного. Предположим, что функция f не ограничена на отрезке $[a; b]$. Разобьем этот отрезок пополам. Тогда хотя бы на одной из половин функция будет неограниченной: если бы она была ограничена на обеих половинах, то она оказалась бы ограниченной и на всем отрезке $[a; b]$. Ту часть отрезка $[a; b]$, на которой функция не ограничена, обозначим $[a_1; b_1]$ и снова разделим пополам. Выберем ту половину отрезка $[a_1; b_1]$, на которой функция не ограничена (если функция не ограничена на

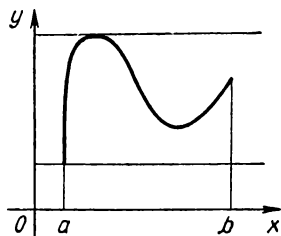


Рис. 83

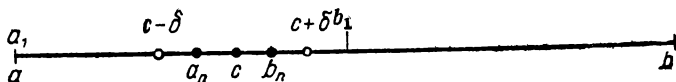


Рис. 84

обеих половинах отрезка, то можно выбирать любую из них), обозначим выбранный отрезок $[a_2; b_2]$. Продолжая описанный процесс последовательного деления и выбора отрезков, получим стягивающуюся систему отрезков $[a; b]$, $[a_1; b_1]$, $[a_2; b_2]$, ..., $[a_n; b_n]$, ..., (*) на каждом из которых функция f не ограничена. Эти отрезки стягиваются к некоторой точке c отрезка $[a; b]$ (см. теорему из п. 39), в которой, как и во всех точках $[a; b]$, функция f непрерывна. Но тогда у точки c есть окрестность $]c - \delta; c + \delta[$, в которой функция f ограничена (см. теорему 6.9). Так как длины отрезков $[a_n; b_n]$ стремятся к нулю, то при некотором n длина отрезка $[a_n; b_n]$ станет меньше δ . Тогда этот отрезок целиком окажется внутри окрестности $U(c, \delta)$ (ведь он содержит точку c , рис. 84). Поскольку функция ограничена в этой окрестности, она окажется ограниченной и на $[a_n; b_n]$. Но мы строили отрезки (*) так, что на каждом из них функция f не ограничена. Полученное противоречие показывает, что сделанное предположение о неограниченности функции f на $[a; b]$ неверно. Итак, функция f ограничена на $[a; b]$. Теорема доказана.

Заметим, что эта теорема неверна для функций, непрерывных на интервале $]a; b[$, — такие функции могут оказаться и неограниченными. Например, функция $\frac{1}{x}$ непрерывна на интервале $]0; 1[$, но не ограничена на нем $\left(\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = +\infty\right)$.

Обозначим множество значений функции f , непрерывной на $[a; b]$, через Y . Из теоремы 4.11 следует, что множество Y ограничено. Поэтому оно имеет точные нижнюю и верхнюю грани. Обозначим их так:

$$m = \inf Y, M = \sup Y.$$

Функция f не может принять значений, больших, чем M , или меньших, чем m . Мы покажем сейчас, что эта функция принимает на отрезке $[a; b]$ значения m и M , т. е. что среди ее значений есть и наименьшее, и наибольшее.

Т е о р е м а 5.11. Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, то среди ее значений на этом отрезке есть наименьшее значение m и наибольшее значение M .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что функция f ни в одной точке отрезка $[a; b]$ не принимает значения M .

Рассмотрим вспомогательную функцию φ , где

$$\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

По предположению ни в одной точке отрезка $[a; b]$ функция f не принимает значения M , а потому знаменатель выражения $\frac{1}{M-f(x)}$ не обращается в нуль, причем $M - f(x) > 0$ при всех $x \in [a; b]$. Но тогда функция φ непрерывна во всех точках отрезка $[a; b]$. Значит, по теореме 4.11 функция φ ограничена на этом отрезке. Поэтому существует такое число B , что для всех $x \in [a; b]$ выполняется неравенство $0 < \frac{1}{M-f(x)} < B$. Но тогда $M - f(x) > \frac{1}{B}$, и потому $f(x) < M - \frac{1}{B}$. Полученное неравенство показывает, что число $M - \frac{1}{B}$ является одной из верхних граней для множества Y значений функции f на $[a; b]$. Но это невозможно, так как M — наименьшая из верхних граней для Y .

Полученное противоречие показывает, что сделанное предположение неверно, т. е. существует точка $c_1 \in [a; b]$, такая, что $f(c_1) = M$. Точно так же доказывается существование такой точки $c_2 \in [a; b]$, что $f(c_2) = m$. Теорема доказана.

Эта теорема (как и предыдущая) неверна для функций, непрерывных на интервале. Функция x^2 непрерывна на интервале $]0; 1[$, но среди ее значений на этом промежутке нет ни наименьшего, ни наибольшего: при $x = 0,1$ имеем $f(x) = 0,1^2 = 0,01$; при $x = 0,01$ $f(x) = 0,0001$; при $x = 0,001$ $f(x) = 0,000001$ и т. д. А так как среди значений x нет значения $x = 0$, то наименьшего значения функции на промежутке $]0; 1[$ не существует.

Пример 3. Функция f , где $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, непрерывна на $[-1; 1]$. Ее наименьшим значением на $[-1; 1]$ является $f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, а наибольшим $f(0) = \frac{1}{1+0} = 1$.

Функция $\frac{1}{1+x^2}$ непрерывна и на всей числовой прямой \mathbf{R} , но среди ее значений на \mathbf{R} нет наименьшего: она принимает сколь угодно малые положительные значения, но не принимает значения 0.

Из доказанной теоремы и теоремы о промежуточном значении вытекает

С л е д с т в и е. Если функция f непрерывна на $[a; b]$ и m, M — ее наименьшее и наибольшее значения на этом отрезке, то множеством значений функции является отрезок $[m; M]$.

56. Обратная функция. В п. 2 были рассмотрены понятия обратного отображения и обратного отображения. Сейчас мы применим эти понятия к числовым функциям.

О п р е д е л е н и е 1.11. Числовая функция f , определенная на множестве X , называется *обратимой на множестве X* , если она принимает различные значения в различных точках этого множества, т. е. если из $x_1 \in X, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$ вытекает $f(x_1) \neq f(x_2)$:

$$(\forall x_1 \in X) (\forall x_2 \in X) (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)).$$

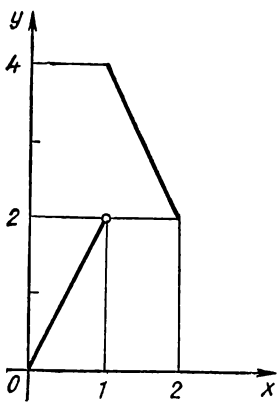


Рис. 85

Достаточное условие обратимости функции дается следующим утверждением:

Теорема 6.11. Если функция f монотонна на множестве X , то она обратима на этом множестве.

Доказательство. Разберем случай, когда f возрастает на X . Пусть $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$. Тогда либо имеем $x_1 < x_2$, и потому $f(x_1) < f(x_2)$, либо $x_1 > x_2$, и потому $f(x_1) > f(x_2)$. В обоих случаях $f(x_1) \neq f(x_2)$. Значит, из $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, следует $f(x_1) \neq f(x_2)$, т. е. функция f обратима на X .

Условие монотонности функции на X не является необходимым условием ее обратимости на X .

Пример 4. Функция f , где

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1, \\ 6 - 2x, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

возрастает на $[0; 1[$ и убывает на $[1; 2]$, а потому не является монотонной на $[0; 2]$, тем не менее она обратима на $[0; 2]$. Это видно из рисунка 85 — разным значениям x_1 и x_2 из $[0; 2]$ отвечают разные значения функции f .

Определение 2.11. Пусть функция f задана на множестве X и $f(X) = Y$. Если f осуществляет обратимое отображение X на Y , то обратное отображение Y на X называют *обратной функцией* и обозначают f^{-1} .

Иными словами, функция f^{-1} такова, что $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$, в том и только том случае, когда $y = f(x)$, $x \in X$.

Эта функция также является числовой функцией. Если известно выражение функции f , то выражение для f^{-1} получают следующим образом. Пишут уравнение $y = f(x)$ и решают его относительно x . При этом могут получиться несколько выражений. Из них надо выбрать то, значения которого принадлежат множеству X . Получают равенство $x = f^{-1}(y)$. Тогда $f^{-1}(y)$ и будет выражением обратной функции. Обычно в этом выражении заменяют y на x .

Выражение x через y не всегда можно записать с помощью известных нам функций. Поэтому операция образования обратной функции может привести к расширению запаса функций.

Пример 5. Найдем обратную функцию для функции $x^2 - 4$, $x \geq 0$.

Решение. Из уравнения $y = x^2 - 4$ находим $x = \sqrt{y + 4}$ или $x = -\sqrt{y + 4}$. Лучу $[0; +\infty[$ принадлежат значения $\sqrt{y + 4}$, где $y \geq -4$. Поэтому обратная функция задается выражением $\sqrt{y + 4}$ и определена на луче $[-4; +\infty[$. Если заменить y на x , получим такое выражение для f^{-1} : $\sqrt{x + 4}$, $x \geq -4$.

Пример 6. Найдем выражение для функции, обратной функции $x + 2\sqrt{x}$, $x \geq 0$.

Решение. Чтобы решить уравнение $y = x + 2\sqrt{x}$ относительно x , перенесем x в левую часть уравнения, после чего возведем обе части уравнения в квадрат. Получим $(y - x)^2 = (2\sqrt{x})^2$, т. е. $x^2 - 2(y + 2)x + y^2 = 0$. Отсюда находим:

$$x_1 = y + 2 + 2\sqrt{y + 1}, \quad x_2 = y + 2 - 2\sqrt{y + 1}.$$

При решении заданного иррационального уравнения методом возведения обеих частей уравнения в квадрат могли появиться посторонние корни, поэтому из найденных значений x_1, x_2 надо отобрать то, которое удовлетворяет заданному уравнению $y = x + 2\sqrt{x}$.

Анализ этого уравнения показывает, что должно выполняться условие $y \geq x \geq 0$. Этому условию удовлетворяет x_2 (так как при $y \geq 0$ имеем $2 - 2\sqrt{y + 1} < 0$) и не удовлетворяет x_1 , значит, x_1 — посторонний корень. Итак, получили, что

$$x = y + 2 - 2\sqrt{y + 1}.$$

Поменяв x и y местами, находим, что функция $x + 2 - 2\sqrt{x + 1}$, $x \geq 0$, обратна функции $x + 2\sqrt{x}$, $x \geq 0$.

В физике понятие обратной функции связывают с обратной функциональной зависимостью величин. Например, путь s , пройденный телом при свободном падении, выражается через время падения по формуле $s = \frac{gt^2}{2}$. Чтобы найти время падения,

зная пройденный путь, надо выразить t через s . Решая уравнение $s = \frac{gt^2}{2}$ относи-

тельно t , получаем $t = \pm \sqrt{\frac{2s}{g}}$. Из физических соображений выбираем неотрица-

тельное решение $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$. Функция $\sqrt{\frac{2s}{g}}$ обратна функции $\frac{gt^2}{2}$.

Теорема 7.11. Если функция f возрастает на множестве X и $f(X) = Y$, то существует обратная функция f^{-1} , причем она определена и возрастает на Y .

Доказательство. Существование обратной функции f^{-1} , определенной на Y , вытекает из теоремы 6.11. Докажем, что f^{-1} возрастает на Y . Возьмем любые две точки $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 < y_2$. Пусть $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Тогда $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. По условию $y_1 < y_2$, а это в силу возрастания функции f возможно лишь при условии, что $x_1 < x_2$.

Итак, мы доказали, что из $y_1 < y_2$ следует $x_1 < x_2$, т. е. что $y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Это значит, что обратная функция f^{-1} возрастает на Y .

Аналогично доказывается

Теорема 7'.11. Если функция f убывает на множестве X и $f(X) = Y$, то существует обратная функция f^{-1} , причем она определена и убывает на Y .

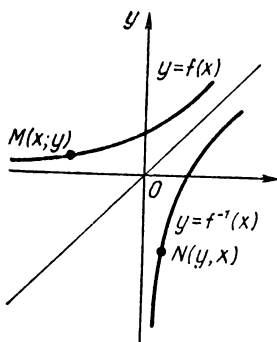


Рис. 86

Пример 7. Функция x^3 возрастает на всей числовой прямой. Поэтому она имеет обратную функцию. Из уравнения $y = x^3$ находим $x = \sqrt[3]{y}$. Поменяв x и y местами, получим $y = \sqrt[3]{x}$. Значит, $\sqrt[3]{x}$ — обратная функция для функции x^3 . Эта функция возрастает на всей числовой прямой.

Пример 8. Функция $x^5 + 6x$ возрастает на всей числовой прямой. Поэтому она имеет обратную функцию. Для того чтобы получить выражение обратной функции, надо было бы решить уравнение $y = x^5 + 6x$ относительно x . Но формулы для решения уравнения пятой степени не существует, поэтому обратная функция не выражается через известные нам функции.

Пример 9. Функция x^2 , $x \in \mathbb{R}$, не имеет обратной, так как $(-x)^2 = x^2$, и потому различным числам x и $-x$ соответствует одно и то же значение функции. Эта функция убывает на луче $]-\infty; 0]$ и возрастает на луче $[0; +\infty[$. Поэтому у функций x^2 , $x \leq 0$, и x^2 , $x \geq 0$, есть обратные. Функцию, обратную к x^2 , $x \geq 0$, обозначают \sqrt{x} , $x \geq 0$. Функцией, обратной к x^2 , $x \leq 0$, будет $-\sqrt{x}$, $x \geq 0$.

В заключение рассмотрим вопрос о графике обратной функции. Если точка $M(x; y)$ принадлежит графику функции f , то точка $N(y; x)$ принадлежит графику функции f^{-1} , и обратно, из принадлежности точки $N(y; x)$ графику функции f^{-1} следует принадлежность точки $M(x; y)$ графику функции f . Но точки $M(x; y)$ и $N(y; x)$ симметричны относительно прямой $y = x$ (биссектрисы первого и третьего координатных углов). Значит, *графики функций f и f^{-1} симметричны друг другу относительно прямой $y = x$.*

На рисунке 86 изображены графики взаимно обратных функций f и f^{-1} .

В случае, когда X является промежутком, и функция f монотонна и непрерывна на нем, множество $Y = f(X)$ также является промежутком. Так как функция f^{-1} отображает промежуток Y на промежуток X , то по теореме 3.11 она непрерывна на Y .

Мы доказали следующую теорему:

Теорема 8.11. Пусть функция f непрерывна и возрастает (убывает) на промежутке X и $f(X) = Y$. Тогда существует заданная на Y обратная к f функция f^{-1} , причем эта функция возрастает (убывает) и непрерывна на Y .

Пример 10. Функция f , где $f(x) = x^n$, определена, возрастает и непрерывна на луче $[0; +\infty[$, причем множество ее значений — луч $[0; +\infty[$. Значит, по теореме 8.11 существует обратная функция, определенная, возрастающая и непрерывная на луче $[0; +\infty[$. Ее обозначают $\sqrt[n]{x}$.

На рисунке 87 изображены графики функций x^n и $\sqrt[n]{x}$.

57. Обратные тригонометрические функции. Функция $\sin x$ не является монотонной на всей числовой прямой. Поэтому, чтобы полу-

чить для нее обратную функцию, надо рассмотреть эту функцию на одном из ее промежутков монотонности. На отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ функция $\sin x$ непрерывна и возрастает от -1 до 1 . Поэтому существует функция, заданная на отрезке $[-1; 1]$ и обратная функции $\sin x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Значения обратной функции принадлежат отрезку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Эту функцию обозначают $\arcsin x$.

Итак, записи

$$x = \arcsin y, -1 \leq y \leq 1, \text{ и } y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2},$$

означают одно и то же. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} x &= \arcsin(\sin x), -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ y &= \sin(\arcsin y), -1 \leq y \leq 1. \end{aligned}$$

График функции $\arcsin x$ получается из графика функции $\sin x$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, с помощью осевой симметрии относительно прямой $y = x$ (рис. 88). В силу теоремы 7.11 функция $\arcsin x$ возрастает и непрерывна на $[-1; 1]$. Замечаем, что график функции симметричен относительно начала координат. Значит, функция нечетна, т. е. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

Аналогично определяются функции, обратные остальным тригонометрическим функциям. Функция $\cos x$ на отрезке $[0; \pi]$ непрерывна и убывает от 1 до -1 . Поэтому существует функция $\arccos x$, обратная к функции $\cos x$, $0 \leq x \leq \pi$, и заданная на отрезке $[-1; 1]$. Записи $x = \arccos y$, $-1 \leq y \leq 1$, и $y = \cos x$, $0 \leq x \leq \pi$, означают одно и то же. Поэтому

$$x = \arccos(\cos x), 0 \leq x \leq \pi,$$

и

$$y = \cos(\arccos y), -1 \leq y \leq 1.$$

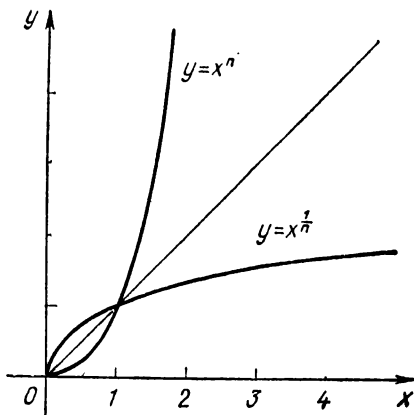


Рис. 87

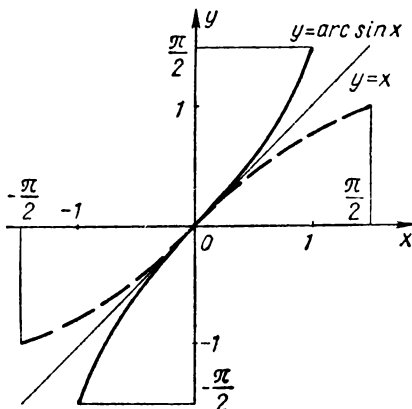


Рис. 88

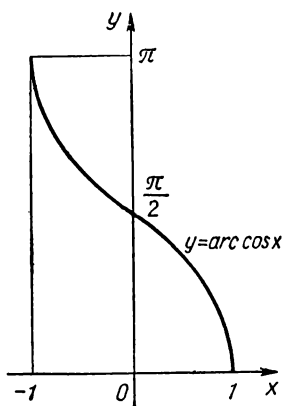


Рис. 89

График функции $\arccos x$ изображен на рисунке 89. Эта функция непрерывна и убывает на отрезке $[-1; 1]$.

Отметим, что справедливо равенство $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$. В самом деле, график функции $y = \arccos x$ симметричен относительно точки $(0; \frac{\pi}{2})$, а потому $\frac{\pi}{2} - \arccos x = \arccos(-x) - \frac{\pi}{2}$, откуда и получаем $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

Функция $\operatorname{tg} x$ на интервале $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ непрерывна и возрастает

от $-\infty$ до $+\infty$. Обратная функция $\operatorname{arctg} x$ определена на всей числовой прямой, непрерывна и возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ (рис. 90). Записи

$$x = \operatorname{arctg} y, \quad -\infty < y < +\infty,$$

и

$$y = \operatorname{tg} x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},$$

означают одно и то же. Имеем:

$$x = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x), \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},$$

и

$$y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y), \quad -\infty < y < +\infty.$$

Прямые $y = -\frac{\pi}{2}$ и $y = \frac{\pi}{2}$ являются горизонтальными асимптотами графика, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

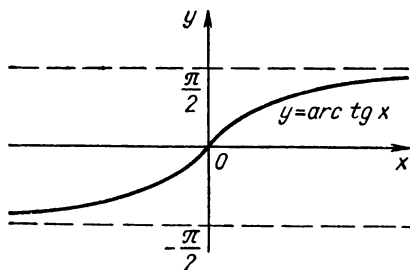


Рис. 90

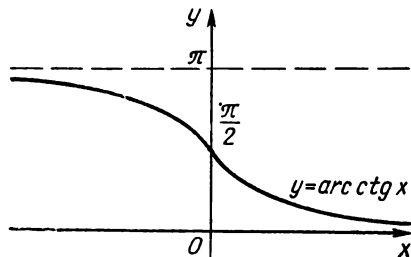


Рис. 91

Функция $\operatorname{arctg} x$ нечетна, т. е. $\operatorname{arctg} (-x) = -\operatorname{arctg} x$.

Функция $\operatorname{ctg} x$ на интервале $]0; \pi[$ убывает от $+\infty$ до $-\infty$ и непрерывна. Значит, на $]-\infty; +\infty[$ определена обратная функция, которая обозначается $\operatorname{arcctg} x$, причем убывающая и непрерывная. График изображен на рисунке 91. Записи

$$x = \operatorname{arcctg} y, \quad -\infty < y < +\infty,$$

и

$$y = \operatorname{ctg} x, \quad 0 < x < \pi,$$

означают одно и то же.

Заметим, что выполняется равенство $\operatorname{arcctg} (-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$. Доказательство проводится, как для функции $\operatorname{arccos} x$.

Прямые $y = 0$ и $y = \pi$ являются горизонтальными асимптотами графика этой функции, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arcctg} x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi.$$

В заключение настоящего пункта остановимся на вопросе о вычислении пределов, связанных с обратными тригонометрическими функциями.

Пример 11. Вычислим $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsin} x}{x}$.

Решение. Положим $t = \operatorname{arcsin} x$, тогда $x = \sin t$. Поскольку при $x \rightarrow 0$ и $t \rightarrow 0$, то получаем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsin} x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1.$$

Аналогично устанавливается, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$.

Из равенств $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsin} x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$ следует, что при $x \rightarrow 0$ функции $\operatorname{arcsin} x$ и $\operatorname{arctg} x$ являются бесконечно малыми, эквивалентными x (см. п. 53), т. е. при $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \operatorname{arcsin} x &\sim x, \\ \operatorname{arccos} x &\sim x. \end{aligned}$$

Эти соотношения расширяют таблицу эквивалентных бесконечно малых, приведенную выше в п. 53.

Пример 12. Вычислим $\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

Решение. При $x \rightarrow \infty$ функция $\frac{1}{x}$ является бесконечно малой, и потому $\operatorname{arctg} \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$. Воспользовавшись теоремой из п. 53, получаем:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{1}{x} = 1.$$

Вопросы для самопроверки

1. Приведите пример, показывающий, что в теореме о нуле непрерывной функции нельзя отбросить условие непрерывности функции. Приведите пример, показывающий, что в этой теореме нельзя отбросить условие: «знаки функции на концах отрезка различны».

2. Запишите с помощью кванторов высказывание: «на отрезке $[a; b]$ есть точка c , в которой функция f обращается в нуль».

3. Пусть $f(a)$ и $f(b)$ имеют одинаковые знаки, а функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$. Может ли эта функция принять нулевое значение на этом отрезке? Обязана ли она принять в некоторой точке $c \in [a; b]$ нулевое значение?

4. Как можно использовать теорему о нуле непрерывной функции для приближенного решения уравнения $f(x) = 0$?

5. Сформулируйте теорему о промежуточном значении.

6. Могут ли все значения функции f , непрерывной на $[a; b]$, быть рациональными? В каком случае?

7. Где в доказательстве теоремы об ограниченности непрерывной функции была использована непрерывность функции? Где в доказательстве этой теоремы было использовано, что $[a; b]$ — отрезок (а не, например, интервал)?

8. Почему из ограниченности функции f на обеих половинах отрезка $[a; b]$ следует, что она ограничена на всем отрезке? Пусть на левой половине отрезка $|f(x)| \leq M_1$, а на правой $|f(x)| \leq M_2$. Какое неравенство выполняется на всем отрезке?

9. На каком этапе доказательства теоремы 3.11 использована непрерывность функции?

10. Принимает ли функция $\frac{1}{1+x^2}$ наименьшее и наибольшее значения на отрезке $[0; 1]$? а на промежутке $]0; 1[$?

11. Принимает ли функция $\sin x$ наибольшее и наименьшее значения на промежутке $]0; 2\pi[$?

12. Что такое обратная функция? Что такое обратная функция?

13. В чем состоит достаточное условие обратимости функции? Является ли это условие необходимым?

14. Как связаны графики двух взаимно обратных функций? Проиллюстрируйте эту связь на графиках функций x^n и $\sqrt[n]{x}$, где $x \geq 0$.

15. Сформулируйте теорему о существовании и непрерывности обратной функции.

16. Дайте определения функций $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$. Перечислите свойства этих функций. Как выглядят графики этих функций?

Упражнения

193. Решите неравенства:

а) $(2x - 1)(x - 2)^3(x + 1)(x + 2)^3 < 0$;

б) $\frac{(x^3 - 1)(x^2 + 5x - 6)}{(x^3 + 8)(x - 3)} > 0$;

в) $\frac{(x + 3)(x + 4)^3(x - 1)(x + 2)}{x(x - 3)(x - 4)} > 0$.

194. Имеют ли следующие уравнения корни на указанных отрезках:

а) $x^3 + 3x + 1 = 0$, $[-1; 0]$; б) $x^5 - 3x + 1 = 0$, $[-2; 3]$;

в) $3 \sin^3 x - 5 \sin x + 1 = 0$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$?

195. Найдите с точностью до 0,01 корень уравнения $x^3 - 3x + 1 = 0$, лежащий на отрезке $[1; 2]$.

196. Докажите, что уравнение $x^3 + 3x - 7 = 0$ имеет только один действительный корень.

197. Докажите, что если n — нечетное число, то уравнение $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$ имеет хотя бы один действительный корень.

198. а) Для функции f , где

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & 0 \leq x < 2, \\ (x-4)^3 + 6, & 2 \leq x \leq 4, \end{cases}$$

мы имеем $f(0) = -4$, $f(2) = 10$, $f(4) = 6$.

Существует ли такое значение c , что $f(c) = 1$? Существует ли такое значение c , что $f(c) = 7$?

б) Для функции f , где

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x-24},$$

мы имеем $f(5) = -\frac{4}{9}$, $f(7) = \frac{6}{11}$.

Существует ли такое c , что $5 \leq c \leq 7$ и $f(c) = 0$?

199. Докажите существование обратной функции для функции f , где:

а) $f(x) = 2x + 1$, $x \in R$; б) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in [0; +\infty[$;

в) $f(x) = x^5$, $x \in R$; г) $f(x) = \sin 2x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$;

д) $f(x) = 4x + \arctg x$, $x \in R$.

200. Найдите выражение обратной функции для функции f , где:

а) $f(x) = \frac{4-x}{3+x}$, $x \neq -3$; б) $f(x) = 4x - x^2$, $x \geq 2$;

в) $f(x) = 4x - x^2$, $x \leq 2$; г) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 27}$, $x \in R$;

д) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, $x \geq 1$.

201. На рисунке 92 изображен график функции f . Имеет ли эта функция обратную? Имеет ли обратную функцию сужение функции f на отрезок $[a; b]$?

202. Докажите, что точки пересечения графиков функций f и f^{-1} могут лежать лишь на прямой $y = x$.

203. Найдите область существования выражения:

а) $\arcsin(3x-4)$; б) $\arccos \frac{2x-3}{5}$;

в) $\arctg \frac{3-x}{x^2-4}$; г) $\arccos \frac{2x}{x^3+3}$;

204. а) $\arctg \frac{1}{x-3} + \sqrt{36-x^2} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$;

б) $\sqrt{\arccos \frac{2}{x} + \sqrt{x^2-x-2}}$;

в) $\arcsin \frac{x+2}{1-x} + \sqrt{-x^2-2x}$.

205. Исследуйте на четность и нечетность функции:

а) $x^2 \arctg 2x$; б) $x^3 + \arcsin 4x$;

в) $x^4 + 6x^3 + \arcsin^3 5x$; г) $x^3 + \arccos x$;

д) $\cos 2x + \arctg x$.

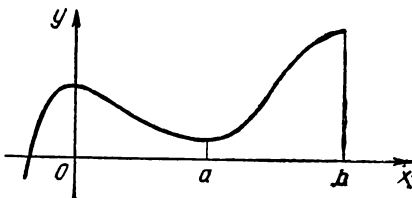


Рис. 92

206. Найдите промежутки монотонности функции f и установите характер монотонности функции на найденных промежутках, если:

а) $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$; б) $f(x) = x^3 + \arcsin x$;

в) $f(x) = \operatorname{arctg}^4 x$.

Вычислите предел функции:

207. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\sin x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\arcsin 3x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{5}\right)^2}{x \sin 3x}$.

208. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\arcsin \frac{x}{3} \operatorname{tg} 5x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x^3 + 3x)}{\arcsin 2x}$.

209. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x^2}{4}}{1 - \cos x}$; б) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\arcsin(1 - 2x)}{4x^2 - 1}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{\arcsin 2x}$.

210. Исследуйте функцию f на непрерывность, найдите точки разрыва и установите их характер, постройте график функции:

а) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$; б) $f(x) = \begin{cases} \arcsin x, & x < 0, \\ x^3 + 1, & x \geq 0; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

211. Функция f не определена в точке $x = 0$. Постройте функцию F , где $F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0, \\ A, & x = 0, \end{cases}$ так, чтобы функция была непрерывной в точке $x = 0$, если

$f(x) = \frac{\arcsin x}{2 \operatorname{tg} x}$.

§ 12. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

58. Показательная функция на множестве рациональных чисел. Пусть $a > 0$. Тогда для любого рационального числа r определено значение a^r . Именно $a^0 = 1$; если $r = \frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, то $a^r = \sqrt[q]{a^p}$, и, наконец, $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$. Тем самым определена функция a^r , $r \in \mathbb{Q}$. Ее называют *показательной функцией на множестве рациональных чисел*.

Рассмотрим сначала случай, когда $a > 1$. Функция a^r , $r \in \mathbb{Q}$, $a > 1$, обладает следующими свойствами:

1. Если $r > 0$, то $a^r > 1$.

В самом деле, пусть $r = \frac{p}{q}$, где $p, q \in \mathbb{N}$. Тогда $a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

Из $a > 1$ вытекает по свойствам числовых неравенств, что $a^p > 1^p$

и что $\sqrt[q]{a^p} > \sqrt[q]{1^p}$, т. е. $a^{\frac{p}{q}} > 1$.

2. Если $r < 0$, то $0 < a^r < 1$.

В самом деле, если $r < 0$, то $-r > 0$, и тогда по свойству 1 имеем $a^{-r} > 1$. Отсюда получаем $0 < \frac{1}{a^{-r}} < 1$, т. е. $0 < a^r < 1$.

3. Функция a^r , $r \in \mathbb{Q}$, принимает только положительные значения. Это следует из свойств 1 и 2 и из того, что $a^0 = 1$.

4. Функция a^r , $r \in \mathbb{Q}$, возрастает на множестве \mathbb{Q} .

В самом деле, пусть $r_1 < r_2$. Тогда $a^{r_2} - a^{r_1} = a^{r_1} (a^{r_2-r_1} - 1)$. По свойству 3 $a^{r_1} > 0$, а по свойству 1 $a^{r_2-r_1} > 1$. Значит, $a^{r_1} (a^{r_2-r_1} - 1) > 0$, откуда $a^{r_1} < a^{r_2}$. Итак, $r_1 < r_2 \Rightarrow a^{r_1} < a^{r_2}$, а это означает возрастание функции a^r на множестве \mathbb{Q} при $a > 1$.

Случай, когда $0 < a < 1$, сводится к рассмотренному выше: достаточно положить $b = \frac{1}{a}$, тогда $b > 1$ и $a^r = b^{-r}$. Отметим свойства функции a^r , $r \in \mathbb{Q}$, когда $0 < a < 1$.

1'. Если $r > 0$, то $0 < a^r < 1$; если $r < 0$, то $a^r > 1$.

2'. Функция принимает только положительные значения.

3'. Функция убывает на множестве \mathbb{Q} .

Случай, когда $a = 1$, не представляет интереса, так как все значения функции a^r , $r \in \mathbb{Q}$, равны единице.

Нам понадобятся еще свойства показательной функции на множестве рациональных чисел, выражаемые следующими леммами:

Л е м м а 1. Если $a > 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1. \quad (1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a > 1$. Тогда $a^{\frac{1}{n}} > 1$, и потому $a^{\frac{1}{n}} = 1 + h$, где $h > 0$. По неравенству Бернулли (см. с. 105)

$$a = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh.$$

Следовательно, $0 \leq h \leq \frac{a-1}{n}$. Но $h = a^{\frac{1}{n}} - 1$. Итак, для любого натурального n имеем:

$$0 \leq a^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \frac{a-1}{n}.$$

Но $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a-1}{n} = 0$, и по теореме о пределе промежуточной функции (см. с. 80)

$\lim_{n \rightarrow \infty} (a^{\frac{1}{n}} - 1) = 0$, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$. Если $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$. Поэ-

тому $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}} = 1$.

Если $a = 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Тем самым равенство (1) доказано для всех $a > 0$.

Л е м м а 2. Если $a > 0$, то

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ r \in \mathbb{Q}}} a^r = 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $a = 1$, то утверждение очевидно.

Пусть $a > 1$ и $r \rightarrow +0$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и подберем $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon$$

(это возможно в силу леммы 1). Если $r \in \mathbb{Q}$ и $r \in]0; \frac{1}{n}[$, то по свойству 4

имеем $1 < a^r < a^{\frac{1}{n}}$, а потому

$$0 < a^r - 1 < a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon.$$

Но это и означает, что $\lim_{r \rightarrow +0} a^r = 1$.

Пусть $a > 1$ и $r \rightarrow -0$. Положим $t = -r$, получим
 $\lim_{\substack{r \rightarrow -0 \\ r \in \mathbb{Q}}} a^r = \lim_{\substack{t \rightarrow +0 \\ t \in \mathbb{Q}}} a^{-t} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{a^t} = 1$.

Так как $\lim_{r \rightarrow -0} a^r = \lim_{r \rightarrow +0} a^r = 1$, то $\lim_{r \rightarrow 0} a^r = 1$.

Пусть $0 < a < 1$. Тогда $a = \frac{1}{b}$, где $b > 1$, и мы имеем:

$$\lim_{r \rightarrow 0} a^r = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{b}\right)^r = \frac{1}{\lim_{r \rightarrow 0} b^r} = \frac{1}{1} = 1.$$

Итак, для любого $a > 0$ выполняется равенство $\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ r \in \mathbb{Q}}} a^r = 1$. Лемма

доказана.

59. Степень с иррациональным показателем. Мы определили показательную функцию лишь на множестве \mathbb{Q} рациональных чисел. Чтобы определить ее для всех действительных чисел, надо ввести понятие степени с иррациональным показателем.

Пусть $a > 1$. В этом случае функция a^r , $r \in \mathbb{Q}$, возрастает. Возьмем иррациональное число α и обозначим через A множество всех чисел вида a^r , $r < \alpha$, и через B множество всех чисел вида a^r , $r > \alpha$:

$$A = \{a^r | r \in \mathbb{Q}, r < \alpha\}, \\ B = \{a^r | r \in \mathbb{Q}, r > \alpha\}.$$

$A \quad B$

Если $a^{r_1} \in A$, $a^{r_2} \in B$, то $r_1 < \alpha < r_2$, и потому $a^{r_1} < a^{r_2}$. Это показывает, что любое число из B больше любого числа из A , т. е. множество A расположено слева от множества B . Но тогда есть хотя бы одно число c , разделяющее множества A и B , т. е. такое c , что $a^{r_1} \leq c \leq a^{r_2}$, где $r_1 \in \mathbb{Q}$, $r_2 \in \mathbb{Q}$, $r_1 < \alpha < r_2$.

Докажем, что множества A и B разделяются лишь одним числом. По теореме из п. 10 для этого достаточно доказать следующее утверждение: для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие рациональные числа r_1 и r_2 , что $r_1 < \alpha < r_2$ и $a^{r_2} - a^{r_1} < \varepsilon$.

Эти числа r_1 и r_2 построим так. Возьмем произвольное рациональное число \tilde{r} , большее α : $\tilde{r} > \alpha$, $\tilde{r} \in \mathbb{Q}$. По лемме 2 имеем: $\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ r \in \mathbb{Q}}} a^r = 1$.

Подберем $r > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $a^r - 1 \leq \frac{\varepsilon}{a^{\tilde{r}}}$, а затем r_1 и r_2 так, чтобы выполнялись неравенства $r_1 \leq \alpha < r_2$ и $r_2 - r_1 < r$. Тогда $a^{r_2} - a^{r_1} = a^{r_1} (a^{r_2-r_1} - 1)$. Но $r_1 < \tilde{r}$, и потому $a^{r_1} < a^{\tilde{r}}$, а $r_2 - r_1 < r$, и потому $a^{r_2-r_1} < a^r$. Значит,

$$a^{r_2} - a^{r_1} = a^{r_1} (a^{r_2-r_1} - 1) < a^{\tilde{r}} (a^r - 1) < a^{\tilde{r}} \cdot \frac{\varepsilon}{a^{\tilde{r}}} = \varepsilon.$$

Итак, $a^r - a^r < \varepsilon$, следовательно, множества A и B разделяются единственным числом. Это число и принимается за a^α .

О п р е д е л е н и е 1.12. *Степенью числа $a > 1$ с иррациональным показателем α называют единственное число $c = a^\alpha$, разделяющее множества*

$$A = \{a^r | r < \alpha, r \in \mathbb{Q}\}$$

и

$$B = \{a^r | r > \alpha, r \in \mathbb{Q}\}.$$

Точно так же определяется степень с иррациональным показателем при $0 < a < 1$, только множества A и B меняются местами: A состоит из чисел вида a^r , $r > \alpha$, B — из чисел вида a^r , $r < \alpha$.

60. Показательная функция на множестве действительных чисел. Мы определили значение a^x для любого $a > 0$ и любого $x \in \mathbb{R}$. Тем самым определена функция a^x , $x \in \mathbb{R}$. Ее называют *показательной функцией* на множестве \mathbb{R} действительных чисел.

Показательная функция на множестве действительных чисел обладает следующими свойствами:

1. *Показательная функция определена на всем множестве \mathbb{R} .*

2. *Все значения показательной функции положительны: $a^x > 0$.* В самом деле, пусть $a > 1$. Если x — рациональное число, то $a^x > 0$ (это доказано в п. 58). Если же x — иррациональное число, то выберем рациональное число r , меньшее x , $r < x$. Тогда по определению степени с иррациональным показателем имеем: $a^r < a^x$ (число a^x больше всех чисел вида a^r , $r < x$, $r \in \mathbb{Q}$). Так как $a^r > 0$, то и $a^x > 0$. Случай $0 < a < 1$ разбирается аналогично.

3. *При $a > 1$ показательная функция возрастает, а при $0 < a < 1$ — убывает.*

В самом деле, пусть $a > 1$ и $x_1 < x_2$. Если x_1 и x_2 — рациональные числа, то неравенство $a^{x_1} < a^{x_2}$ вытекает из возрастания показательной функции на множестве рациональных чисел. Если x_1 рационально, а x_2 иррационально, то a^{x_1} входит в множество A для a^{x_2} , а потому $a^{x_1} < a^{x_2}$. Точно так же разбирается случай, когда x_1 иррационально, а x_2 рационально. Наконец, если x_1 и x_2 — иррациональные числа, то выберем рациональное число r , такое, что $x_1 < r < x_2$. Мы получим:

$$a^{x_1} < a^r < a^{x_2}.$$

Случай, когда $0 < a < 1$, разбирается аналогично.

4. *При $a > 1$ выполняются равенства*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0.$$

В самом деле, если $a > 1$, то $a = 1 + h$, где $h > 0$, и $a^n = (1 + h)^n > 1 + nh$ (мы воспользовались неравенством Бернулли, см.

с. 105). Для любого $p > 0$ найдется такое натуральное число n , что $1 + nh > p$. Тогда при $x > n$ имеем:

$$a^x > a^n > 1 + nh > p.$$

Это и означает (см. п. 33), что $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$.

Докажем теперь, что $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$. Имеем:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^n} = 0.$$

Итак, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{-n} = 0$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое n , что $a^{-n} < \varepsilon$.

Тогда при $x < -n$ имеем $0 < a^{-x} < \varepsilon$. Это и означает, что $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.

5. Если $0 < a < 1$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$.

Доказывается аналогично.

6. Функция a^x непрерывна при всех значениях x . Возьмем произвольное $x_0 \in \mathbb{R}$. Нам надо доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из неравенства $|x - x_0| < \delta$ вытекает $|a^x - a^{x_0}| < \varepsilon$.

Рассмотрим случай, когда $a > 1$.

Мы уже знаем (см. с. 161), что для любого $x_0 \in \mathbb{R}$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие рациональные числа r_1 и r_2 , что $r_1 < x_0 < r_2$ и $a^{r_1} - a^{x_0} < \varepsilon$. В силу возрастания функции a^x это означает, что на интервале $]r_1; r_2[$ выполняется неравенство $|a^x - a^{x_0}| < \varepsilon$. Так как этот интервал содержит некоторую окрестность точки x_0 , непрерывность функции a^x в этой точке доказана.

Случай, когда $0 < a < 1$, разбирается аналогично.

Доказанных свойств функции a^x достаточно для того, чтобы построить ее график. При $a > 1$ он имеет вид, изображенный на рисунке 93, а при $0 < a < 1$ — вид, изображенный на рисунке 94. Так как при любом $a > 0$ имеем $a^0 = 1$, то графики всех функций a^x пересекают ось ординат в одной и той же точке $M(0; 1)$.

61. Свойства степеней с действительными показателями. Из непрерывности показательной функции следует, что все известные нам свойства степеней с рациональными показателями справедливы и для степеней с любыми действительными показателями. А именно:

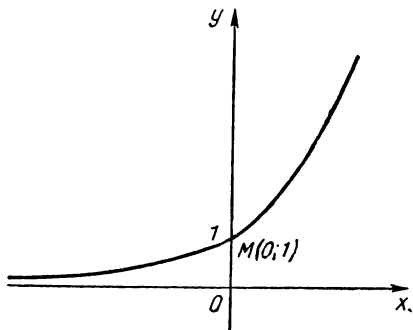


Рис. 93

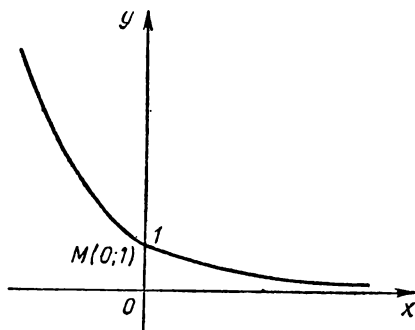


Рис. 94

$$1) (ab)^x = a^x \cdot b^x; \quad 2) \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \quad b \neq 0;$$

$$3) a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \quad 4) \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y};$$

$$5) (a^x)^y = a^{xy}.$$

Докажем свойство 1). Выберем последовательность рациональных чисел $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$, сходящуюся к числу x : $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$. По свойствам степеней с рациональными показателями для любого n верно равенство $(ab)^{r_n} = a^{r_n} b^{r_n}$. Кроме того, в силу непрерывности показательной функции имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ab)^{r_n} = (ab)^x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = a^x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b^{r_n} = b^x.$$

Поэтому

$$(ab)^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (ab)^{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{r_n} \cdot b^{r_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b^{r_n} = a^x \cdot b^x.$$

Свойство 2) доказывается точно так же. Теперь докажем свойство 3), называемое *теоремой сложения для показательной функции* (оно выражает значение показательной функции от суммы двух аргументов через ее значения от этих аргументов). Выберем две последовательности рациональных чисел (r_n) и (s_n) , такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = y.$$

Так как

$$a^{r_n} \cdot a^{s_n} = a^{r_n + s_n},$$

то имеем:

$$a^x \cdot a^y = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{r_n} \cdot a^{s_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n + s_n} = a^{x+y}.$$

Точно так же доказываются свойства 4 и 5.

62. Логарифмическая функция. Мы доказали, что при $a > 1$ функция a^x непрерывна и возрастает на множестве \mathbf{R} , причем $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$, т. е. множество значений функции a^x — открытый луч $]0; +\infty[$. По теореме о существовании и непрерывности обратной функции (см. п. 56) существует функция, обратная функции a^x и определенная на $]0; +\infty[$. Эту функцию обозначают $\log_a x$ и называют *логарифмической функцией с основанием a* . Таким образом, записи

$$y = a^x, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (2)$$

и

$$x = \log_a y, \quad y > 0, \quad (3)$$

равносильны. Например, из равенств $a^0 = 1$, $a^1 = a$ следует, что при $a > 0$, $a \neq 1$ $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$.

Число $\log_a u$ называют *логарифмом числа u по основанию a* . Мы

доказали, таким образом, что если $a > 0$ и $a \neq 1$, то у любого положительного числа y существует логарифм по основанию a .

Из равенств (2) и (3) вытекает, что для любого x и любого $y > 0$ верны соотношения

$$x = \log_a a^x \quad (4)$$

и

$$y = a^{\log_a y}. \quad (5)$$

График функции $\log_a x$ получается из графика функции a^x симметричным отражением от прямой $y = x$ (рис. 95).

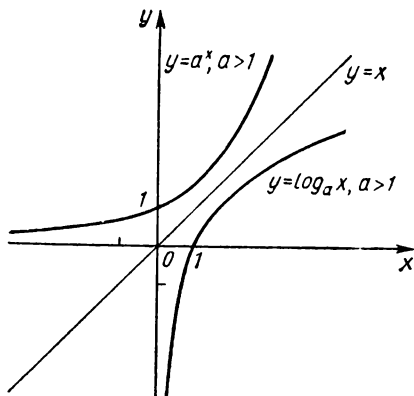


Рис. 95

Свойства логарифмической функции вытекают из свойств показательной функции.

1. Функция $\log_a x$ определена только при $x > 0$.

Это свойство вытекает из того, что множеством значений показательной функции является $]0; +\infty[$.

2. Множеством значений функции $\log_a x$ является вся числовая прямая.

Это свойство вытекает из того, что показательная функция определена на всей числовой прямой.

3. Функция $\log_a x$ непрерывна в любой точке $x > 0$.

Это вытекает из теоремы о непрерывности обратной функции.

4. При $a > 1$ функция $\log_a x$ возрастает, при $0 < a < 1$ функция $\log_a x$ убывает.

Это также следует из теоремы существования и непрерывности обратной функции и соответствующих свойств показательной функции.

5. Если $a > 1$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = -\infty$; если $0 < a < 1$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = +\infty$.

Это следует из того, что при $a > 1$ имеем:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0,$$

а при $0 < a < 1$ имеем:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty.$$

6. Основное функциональное уравнение для логарифмической функции имеет вид:

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y,$$

где $x > 0$, $y > 0$.

В самом деле, пусть $\log_a x = b$, $\log_a y = c$. Тогда $x = a^b$, $y = a^c$.

Перемножая равенства, получаем по свойству показательной функции:

$$xy = a^b \cdot a^c = a^{b+c}.$$

По определению логарифма это значит, что

$$\log_a xy = b + c = \log_a x + \log_a y.$$

7. При $x > 0$ справедливо равенство

$$\log_a x^c = c \log_a x. \quad (6)$$

В самом деле, пусть $\log_a x = b$. Тогда $a^b = x$, и, следовательно, в силу свойств показательной функции

$$x^c = (a^b)^c = a^{cb}.$$

Но тогда по определению логарифма

$$\log_a x^c = cb = c \log_a x.$$

Из равенства (6) вытекает, что

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$$

и

$$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x.$$

Отметим также, что

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x + \log_a \frac{1}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

Найдем выражение логарифма числа по основанию b через его логарифм по основанию a . Пусть $\log_a x = c$, $\log_b x = d$. Тогда имеем $a^c = x$, $b^d = x$, и потому $a^c = b^d$. Логарифмируя обе части этого равенства по основанию a , получаем:

$$\log_a a^c = \log_a b^d, \text{ т. е. } c = d \log_a b,$$

откуда $d = \frac{c}{\log_a b}$. Поскольку $c = \log_a x$, $d = \log_b x$, то получаем:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}. \quad (7)$$

Это формула перехода от логарифмов по основанию a к логарифмам по основанию b . Полагая в этой формуле $x = a$, получаем:

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}. \quad (8)$$

Логарифмы по основанию e (см. п. 40) называют *натуральными логарифмами* и обозначают $\ln x$ (logarithmus naturalis). Из формул (7) и (8) следует, что

$$\ln x = \frac{\log_a x}{\log_a e} = \log_a x \cdot \ln a.$$

Полезно запомнить, что $\ln 10 \approx 2,3026$, $\lg e \approx 0,4343$. Отметим еще,

что $e^{\ln a} = a$ (это вытекает из равенства (5)) и что $a^x = e^{x \ln a}$.

Пример 1. Докажем, что $\log_{a^n} x^n = \log_a x$.

Решение. По формуле (7) получим:

$$\log_{a^n} x^n = \frac{\log_a x^n}{\log_a a^n} = \frac{n \log_a x}{n} = \log_a x.$$

Пример 2. Зная, что $\lg 5 \approx 0,70$, найдем $\ln 5$.

Решение. По формуле (9) $\ln 5 = \lg 5 \cdot \ln 10 \approx 0,70 \cdot 2,30 = 1,61$.

63. Гиперболические функции. Показательная функция не является ни четной, ни нечетной. То же самое относится, в частности, к функции e^x . Но ее можно представить в виде суммы четной и нечетной функций:

$$e^x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Для слагаемых, стоящих в правой части равенства, введем особые обозначения и названия:

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x — \text{гиперболический косинус},$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x — \text{гиперболический синус}.$$

Так как

$$\operatorname{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \operatorname{ch} x,$$

$$\operatorname{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\operatorname{sh} x,$$

то $\operatorname{ch} x$ — четная функция, а $\operatorname{sh} x$ — нечетная функция.

Графики этих функций изображены на рисунках 96 и 97.

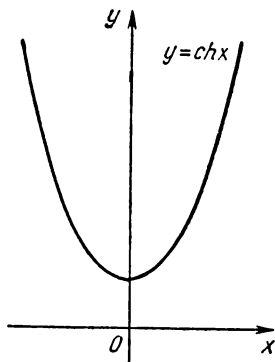


Рис. 96

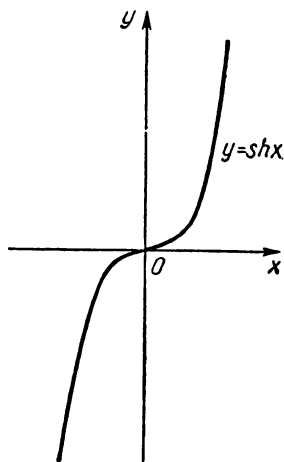


Рис. 97

Кривую $y = \operatorname{ch} x$ называют *цепной линией*, так как по дуге этой кривой провисает цепь или канат под действием силы тяжести.

Отношение $\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ называют *гиперболическим тангенсом* и обозначают $\operatorname{th} x$. Отношение $\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ называют *гиперболическим котангенсом* и обозначают $\operatorname{cth} x$. Графики функций $\operatorname{th} x$ и $\operatorname{cth} x$ изображены на рисунках 98 и 99.

Свойства функций $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$ весьма напоминают свойства тригонометрических функций. Например:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \\ &\quad - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1. \end{aligned}$$

Значит,

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} + \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \operatorname{ch} 2x. \end{aligned}$$

Значит,

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x.$$

Так как $2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = 2 \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \operatorname{sh} 2x$, то получаем:

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x.$$

В действительной области аналогия тригонометрических и гиперболических функций остается непонятной. Лишь после изучения теории функций комплексной переменной станут ясны причины этой аналогии.

64. Элементарные функции. В § 3 мы рассматривали рациональные, иррациональные и тригонометрические функции, в § 11 ввели обратные тригонометрические функции, а в предыдущих пунктах данного параграфа — показательную и логарифмическую функции. Все эти функции изучаются в средней школе. Кроме них, рассматриваются функции, получаемые из вышеперечисленных с помощью операций сложения, умножения, деления и образования композиции функций. Получаемые таким образом функции носят название элементарных функций. Более точно класс элементарных функций определяется следующим образом:

Определение 2.12. *Элементарными функциями* называются функции следующего вида:

- а) постоянные функции;
- б) тождественная функция x ;
- в) показательная функция e^x ;
- г) логарифмическая функция $\ln x$;
- д) тригонометрическая функция $\sin x$;
- е) обратная тригонометрическая функция $\arcsin x$;

ж) функции вида $f + g, fg, \frac{f}{g}, g \circ f$, где f и g — элементарные функции.

Из данного определения следует, что все рациональные функции элементарны. Элементарны и функции a^x (так как $a^x = e^{x \ln a}$), $\log_a x$ (так как $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$), x^a , $a \in \mathbb{R}$, $x > 0$ (так как при $x > 0$ имеем $x^a = e^{\ln x^a} = e^{a \ln x}$), элементарна и функция $|x|$ (так как $|x| = (x^2)^{\frac{1}{2}}$), а также функция $\operatorname{sign} x$, которая определяется выражением

$\frac{x}{|x|}$ и читается «сигнум икс» (эта функция не определена при $x = 0$).

Функция $\sqrt[n]{x}$ при четном n и $x > 0$ совпадает с $x^{\frac{1}{n}}$, а при нечетном n и $x \neq 0$ она совпадает с $\operatorname{sign} x \cdot |x|^{\frac{1}{n}}$. Поэтому, если условиться рассматривать такие функции лишь в области $x \neq 0$, они являются элементарными. Обычно доопределяют эти функции и при $x = 0$, полагая $\sqrt[n]{0} = 0$.

Далее, к элементарным функциям относятся функции $\cos x$ (так как $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$), $\operatorname{tg} x$ (так как $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$), $\operatorname{ctg} x$ (так как $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$), а также функции

$$\arccos x \text{ (так как } \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x),$$

$$\operatorname{arctg} x \text{ (так как } \operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}),$$

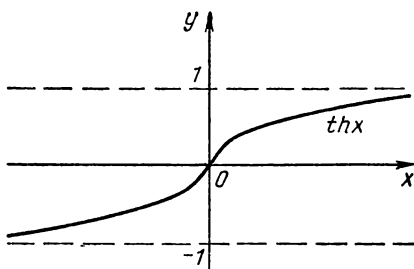


Рис. 98

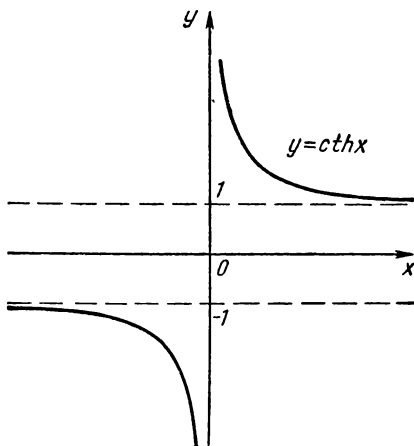


Рис. 99

$\operatorname{arccotg} x$ (так как $\operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$).

Иными словами, все функции, изучаемые в школе, элементарны. Элементарны и гиперболические функции, рассмотренные нами в п. 63.

Результаты, полученные нами выше в п. 46—48, 58, 61, 63, можно сформулировать следующим образом:

Т е о р е м а 1.12. *Элементарная функция непрерывна во всех точках своей области определения.*

Но для функции f , непрерывной в точке a , имеет место равенство $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Отсюда вытекает следующее *правило вычисления пределов элементарных функций*:

Если элементарная функция f определена в точке a , то ее предел при $x \rightarrow a$ равен ее значению в указанной точке.

Фактически мы уже пользовались этим правилом при вычислении пределов рациональных, иррациональных и тригонометрических функций. В дальнейшем оно будет использоваться для вычисления пределов любых элементарных функций.

П р и м е р 3. Вычислим

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x + \ln x}{\log_4 4x}.$$

Р е ш е н и е. Так как элементарная функция f , где

$$f(x) = \frac{e^x + \ln x}{\log_4 4x},$$

определена в точке $x = 1$, то искомый предел равен $f(1)$, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x + \ln x}{\log_4 4x} = \frac{e^1 + \ln 1}{\log_4 4} = \frac{e + 0}{1} = e.$$

Вопросы для самопроверки

1. Как определяется показательная функция на множестве рациональных чисел? Какими свойствами она обладает?

2. Как определяются множества A и B в определении степени с иррациональным показателем? Что означает запись

$$\{a^r \mid r \in \mathbb{Q}, r < \alpha\}?$$

3. Почему при $a > 1$ множество A лежит слева от B ?

4. На основании какой теоремы из главы I сделан вывод о единственности разделяющего числа для множеств A и B ?

5. Почему существует такое r , что $0 < a^r - 1 < \frac{e}{a^r}$?

6. На основании чего сделан вывод, что $a^{r_1} \in A$ и $a^{r_2} \in B$?

7. Определите, что значит $4^{\sqrt[3]{3}}$, 10^π .
8. Найдите оценки сверху и снизу для чисел $2^{\sqrt[2]{2}}$, 10^π , $4^{\sqrt[3]{3}}$.
9. Сравните по величине числа: а) $5^{1,41}$, $5^{\sqrt[2]{2}}$ и $5^{1,42}$; б) $3^{\sqrt[3]{3}}$, $3^{1,73}$ и $3^{1,74}$.
10. Какой знак имеет разность $\left(\frac{3}{7}\right)^2 \sqrt[2]{2} - 1$?
11. Как определяется показательная функция на множестве действительных чисел? Какими свойствами она обладает?
12. Как из равенства $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$, где $r, s \in \mathbb{Q}$, выводят, что $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, где $x, y \in \mathbb{R}$? Каким свойством показательной функции пользуются при этом?
13. Как определяется логарифмическая функция? Какими свойствами она обладает?
14. Как из графика функции e^x получить график функции $\ln x$? Постройте в одной координатной плоскости оба графика.
15. Как по графику функции ka^x определить основание a и коэффициент k ?

Упражнения

212. а) Определите знак α , если $\left(\frac{2}{3}\right)^\alpha = 4$.

б) Определите знак числа $a - 1$, если $a^{-0,4\sqrt[2]{2}} = 5$.

в) Пусть $(0,73)^\alpha < (0,73)^\beta$. Что больше: α или β ?

213. Постройте график функции:

а) 2^x ; б) $2 \cdot 3^x$; в) $-\left(\frac{1}{2}\right)^x$; г) $e^x + 5$;

д) $-3 \ln x$; е) $\frac{1}{2} \log_2 x$; ж) $\ln x - 3$.

214. а) Зная, что $\log_6 2 = a$, $\log_6 5 = b$, найдите $\log_3 5$.

б) Зная, что $\lg 2 \approx 0,301$, найдите $\ln 125$.

215. Упростите выражение:

$$\ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \dots + \ln \frac{n+1}{n}.$$

216. Докажите следующие формулы:

а) $1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$; б) $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \operatorname{sh} x$;

в) $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$.

217. Докажите, что:

а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$;

в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{th} x = 1$; г) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{th} x = -1$.

218. Дано $f(x) = 2^{x^2}$, $g(x) = x^3 + 1$. Найдите выражение для: а) $f^2 + g^2$; б) $f^4 \cdot g^2$; в) $f(x^4) \cdot g(x^2)$.

219. Докажите, что функция f , где $f(x) = a \cdot 2^x + b \cdot 4^x$, при любых значениях постоянных a, b удовлетворяет функциональному уравнению $f(x+2) - 6f(x+1) + 8f(x) = 0$.

220. Даны функции f и g , где $f(x) = x^2$, $g(x) = e^x$. Найдите выражение для: а) $f \circ f$; б) $f \circ g$; в) $g \circ f$; г) $g \circ g$.

221. Исследуйте на четность или нечетность функцию:

$$\text{а) } \frac{1+e^x}{1-e^x}; \quad \text{б) } \sin x^2 - e^{-x^2} + x^4 - 6x^2 + 11; \quad \text{в) } \ln(\cos x + x^2 + 5).$$

222. Исследуйте на монотонность функцию:

$$\text{а) } \ln^3 x + x^6; \quad \text{б) } \log_1 x - 3x; \quad \text{в) } x^5 \lg^2 x, x \geq 1; \quad \text{г) } \ln(x^2 - 6x + 10);$$

$$\text{д) } \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 8x + 20).$$

Найдите область существования выражений:

$$223. \text{ а) } \lg(4 - 5x); \quad \text{б) } \ln(x^2 - 4x + 3);$$

$$\text{в) } \lg(2 - x - x^2); \quad \text{г) } \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+6}{x^2 - 4x + 3}; \quad \text{д) } e^{\frac{x+1}{x^2-9x}}.$$

$$224. \text{ а) } \sqrt{9-x^2} + \ln \frac{x+1}{x-2}; \quad \text{б) } \log_2(x^2 + 6x + 9) + \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x - 8);$$

$$\text{в) } \sqrt{\frac{x-1}{x-8}} + \frac{x-5}{\log_2(12-x)} + \cos 5x.$$

$$225. \text{ а) } \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2-x}{2}} + \frac{1}{2^{2x-3}-1}; \quad \text{б) } \sqrt{4-|x|} + \frac{1}{\ln \frac{x-3}{x-1}}.$$

$$226. \text{ а) } \ln(1 - \lg x); \quad \text{б) } \ln(2 \sin x - 1); \quad \text{в) } \ln(3 - 4 \cos^2 x).$$

$$227. \text{ а) } \lg(3 - |x|) + \sqrt{\sin x}; \quad \text{б) } \lg(16 - x^2) + \sqrt{\cos x}.$$

$$228. \text{ Постройте график функции: а) } \lg \sin x; \quad \text{б) } \lg \lg x; \quad \text{в) } 2^{\sin x};$$

$$\text{г) } e^{\lg x}; \quad \text{д) } e^{-x^2}; \quad \text{е) } e^x \sin x; \quad \text{ж) } E(\lg x); \quad \text{з) } \{\lg x\}.$$

229. Решите графически уравнение:

$$\text{а) } 2^x = 3 - x^2; \quad \text{б) } \lg x = 0,1 x;$$

$$\text{в) } x^2 = \log_2(x+2); \quad \text{г) } \lg x = 4 - x^2;$$

$$\text{д) } x^2 = e^x + 2; \quad \text{е) } 10x = e^{-x}.$$

230. Пользуясь определением бесконечно большой, докажите, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.

231. Исследуйте на непрерывность следующие функции:

$$\text{а) } 2^{\frac{1}{1+x^2}}; \quad \text{б) } \sin^3 2x + e^{3x}(x^2 - x - 5); \quad \text{в) } \frac{\ln(4+x^2) \cdot 3^{-\cos^2 x}}{\arccos \frac{2x}{1+x^2}}.$$

232. Найдите точки разрыва функции f и установите характер точек разрыва, если:

$$\text{а) } f(x) = e^{\frac{1}{x+3}}; \quad \text{б) } f(x) = e^{\frac{1}{\sin x}}.$$

§ 13. ПРЕДЕЛЫ, СВЯЗАННЫЕ С ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ И ЛОГАРИФИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЯМИ

65. Предел показательной-степенной функции. Показательно-степенными называют функции вида $(f(x))^{g(x)}$. Примерами таких функций могут служить $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$, $\left(\frac{x^2+1}{x^2+4}\right)^{\lg x}$ и т. д.

Функция $f(x)^{g(x)}$ определена в области, где $f(x) > 0$ или где $f(x) = 0$, а $g(x) > 0$. Если $f(x) > 0$, то

$$f(x)^{g(x)} = (e^{\ln f(x)})^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}.$$

Отсюда ясно, что показательно-степенная функция непрерывна при тех значениях x , при которых функции f и g непрерывны, причем $f(x) > 0$. Если существуют пределы $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, причем $b > 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)} = e^{c \ln b} = e^{\ln b^c} = b^c.$$

Итак,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

В этом равенстве a либо число, либо $+\infty$, либо $-\infty$, либо ∞ .

Остановимся теперь на особых случаях.

а) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c > 0$. В этом случае

$$\lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x) = -\infty,$$

и потому

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0.$$

Точно так же доказывается, что если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c < 0$, то $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = +\infty$.

б) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c > 0$. Здесь $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x) = +\infty$, и потому

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty.$$

Точно так же доказывается, что если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c < 0$, то $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = 0$.

Мы опускаем разбор остальных случаев и приводим следующую таблицу значений предела $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$.

В случаях, соответствующих зачерненным клеткам, ответ неоднозначен и зависит от того, как именно стремятся $f(x)$ и $g(x)$ к своим пределам. Эти случаи будут рассмотрены ниже.

$b \backslash c$	$-\infty$	$-\infty < c < 0$	0	$0 < c < +\infty$	$+\infty$
0	$+\infty$	$+\infty$		0	0
$0 < b < 1$	$+\infty$	b^c	1	b^c	0
1		1	1	1	
$1 < b < +\infty$	0	b^c	1	b^c	$+\infty$
$+\infty$	0	0		$+\infty$	$+\infty$

Пример 1. Вычислим предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 4}{x^2 + 3} \right)^{\frac{3x-5}{x+1}}.$$

Решение. Так как (см. п. 35)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 4}{x^2 + 3} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-5}{x+1} = 3,$$

то искомый предел равен $2^3 = 8$.

Пример 2. Вычислим предел:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 4+0} \left(\frac{x^2 + 4}{x + 1} \right)^{\frac{1}{4-x}}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 4-0} \left(\frac{x^2 + 4}{x + 1} \right)^{\frac{1}{4-x}}.$$

Решение. а) Так как

$$\lim_{x \rightarrow 4+0} \frac{x^2 + 4}{x + 1} = \frac{4^2 + 4}{4 + 1} = 4 > 1, \quad \lim_{x \rightarrow 4+0} \frac{1}{4-x} = -\infty,$$

то искомый предел равен 0.

$$\text{б) Здесь } \lim_{x \rightarrow 4-0} \frac{1}{4-x} = +\infty, \text{ и потому } \lim_{x \rightarrow 4-0} \left(\frac{x^2 + 4}{x + 1} \right)^{\frac{1}{4-x}} = +\infty.$$

Пример 3. Вычислим предел:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 6}{2x^2 + 7} \right)^{x^3}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 6}{2x^2 + 7} \right)^{x^3}.$$

Решение. а) Так как

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 6}{2x^2 + 7} = \frac{1}{2} < 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty,$$

то искомый предел равен нулю.

б) Здесь $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$, и потому $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 6}{2x^2 + 7} \right)^{x^3} = +\infty$.

66. Предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. В п. 40 было доказано существование предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Этот предел мы обозначили буквой e : $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Последовательность с общим членом $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ получается, если придавать аргументу функции $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ лишь натуральные значения. Мы покажем сейчас, что, если x стремится к бесконечности произвольным образом, предел этой функции также равен e . Иными словами, докажем, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (1)$$

Для этого достаточно показать, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \text{ и } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Начнем с первого случая. Пусть $x \rightarrow +\infty$. Возьмем произвольное $x > 0$ и обозначим целую часть x через n : $n = E(x)$. Тогда $n \leq x < n + 1$, и, следовательно, $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$, а потому

$$1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{n}.$$

Из неравенств $1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x}$, $n \leq x$, следует, что $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n$, а из неравенств $1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{n}$ и $x < n + 1$ следует, что $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Итак, мы доказали, что

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad (2)$$

где, напомним, $n = E(x)$. Но

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} : \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \right) = e : 1 = e$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) = e \cdot 1 = e.$$

Когда $x \rightarrow +\infty$, то $n \rightarrow +\infty$ (пишут обычно $n \rightarrow \infty$), а потому левая и правая части в (2) стремятся к e . Поэтому по теореме о пределе промежуточной функции (см. с. 80) имеем:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Рассмотрим предел $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Положим $x = -t$.

Когда $x \rightarrow -\infty$, то $t \rightarrow +\infty$ и

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{t-1}\right)^t = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)\right) = e \cdot 1 = e.\end{aligned}$$

Итак, и $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. Значит, мы доказали равенство (1).

Если в этом равенстве положить $t = \frac{1}{x}$, то получаем:

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e. \quad (3)$$

Пример 4. Вычислим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{5x}.$$

Решение. Имеем:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right)^5 = e^5.$$

Пример 5. Вычислим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{4x-3}.$$

Решение. Имеем:

$$\frac{2x+1}{2x-1} = \frac{(2x-1)+2}{2x-1} = 1 + \frac{2}{2x-1}.$$

Преобразуем выражение функции, содержащейся под знаком предела, следующим образом:

$$\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{4x-3} = \left(\left(1 + \frac{2}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{2}}\right)^{\frac{2}{2x-1} \cdot (4x-3)}$$

и положим $f(x) = \left(1 + \frac{2}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{2}}$, $g(x) = \frac{2(4x-3)}{2x-1}$. Вычислим $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$. Для вычисления первого предела введем новую переменную $t = \frac{2}{2x-1}$.

Если $x \rightarrow \infty$, то $t \rightarrow 0$, и мы получаем:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e.$$

Вычислим второй предел:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(4x-3)}{2x-1} = 4$$

(см. п. 35). В п. 65 мы отметили, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)^{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)}.$$

Значит,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{4x-3} = e^4.$$

67. Вычисление пределов, связанных с показательной и логарифмической функциями. Формулы (1) и (3) лежат в основе вычисления большинства пределов, связанных с показательной и логарифмической функциями.

Прологарифмировав обе части равенства (3) по основанию e , получаем $\ln \left(\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \right) = \ln e = 1$.

Заметим теперь, что в силу непрерывности логарифмической функции для любого $a > 0$ имеем:

$$\lim_{x \rightarrow a} \ln x = \ln a.$$

Поэтому если $\lim_{t \rightarrow b} g(t) = a$, то

$$\lim_{t \rightarrow b} \ln g(t) = \ln a = \ln \left(\lim_{t \rightarrow b} g(t) \right).$$

В частности,

$$1 = \ln \left(\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \ln (1+t)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t}.$$

Итак, мы доказали, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1. \quad (4)$$

Это равенство означает, что *при $t \rightarrow 0$ функции $\ln(1+t)$ и t являются эквивалентными бесконечно малыми* (см. п. 53): $\ln(1+t) \sim t$, если $t \rightarrow 0$.

Введем новую переменную z , положив $\ln(1+t) = z$. Тогда $(1+t) = e^z$, $t = e^z - 1$. Поэтому

$$\lim_{t \rightarrow 0} t = \lim_{z \rightarrow 0} (e^z - 1) = 0,$$

и из формулы (4) следует, что

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{e^z - 1} = 1. \quad (5)$$

Мы доказали, что *при $z \rightarrow 0$ функции $e^z - 1$ и z — эквивалентные бесконечно малые: $e^z - 1 \sim z$, если $z \rightarrow 0$.*

Так как, в частности, $a^x = e^{x \ln a}$, то $e^{x \ln a} - 1 \sim x \ln a$. Иными словами, получаем, что $a^x - 1 \sim x \ln a$, если $x \rightarrow 0$.

Наконец докажем, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha. \quad (6)$$

Для этого заметим, что $1+x = e^{\ln(1+x)}$, и потому $(1+x)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+x)}$. Значит,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha \ln(1+x)}{x} = \alpha.$$

Равенство (6) означает, что $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, если $x \rightarrow 0$.

Мы доказали в этом пункте следующие соотношения эквивалентности бесконечно малых (в дополнение к тем, что были получены выше в п. 53 и 58): если $x \rightarrow 0$, то

$$\ln(1+x) \sim x, \quad e^x - 1 \sim x, \quad a^x - 1 \sim x \ln a, \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x.$$

Пример 6. Вычислим предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{tg} 2x)}{e^{\sin 3x} - 1}.$$

Решение. Так как $\ln(1+x) \sim x$, а $\operatorname{tg} 2x$ — бесконечно малая при $x \rightarrow 0$, то $\ln(1 + \operatorname{tg} 2x) \sim \operatorname{tg} 2x$ при $x \rightarrow 0$. Точно так же из $e^x - 1 \sim x$ получаем $e^{\sin 3x} - 1 \sim \sin 3x$. Поэтому, заменяя числитель и знаменатель дроби эквивалентными бесконечно малыми, получаем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{tg} 2x)}{e^{\sin 3x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x}.$$

Но $\operatorname{tg} 2x \sim 2x$, $\sin 3x \sim 3x$, и потому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

Итак, искомый предел равен $\frac{2}{3}$.

Пример 7. Вычислим предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - 1}{\sqrt[4]{1+\sin 3x} - 1}.$$

Решение. Снова заменяем числитель и знаменатель эквивалентными бесконечно малыми. Числитель запишем в виде $(1+2x)^{\frac{1}{3}} - 1$, а знаменатель — в виде $(1+\sin 3x)^{\frac{1}{4}} - 1$. Применяя соотношение $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, получаем:

$$(1+2x)^{\frac{1}{3}} - 1 \sim \frac{1}{3} \cdot 2x, \quad (1+\sin 3x)^{\frac{1}{4}} - 1 \sim \frac{1}{4} \sin 3x.$$

Значит,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - 1}{\sqrt[4]{1+\sin 3x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3}x}{\frac{1}{4}\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x}{3 \cdot 3x} = \frac{8}{9}.$$

В п. 65 были вычислены пределы показательных функций $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$. Там остались неразобранными следующие случаи:

а) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ (неопределенность вида 1^∞);

б) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ (неопределенность вида 0^0);

в) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ (неопределенность вида ∞^0).

Для вычисления таких пределов заменяют $f(x)^{g(x)}$ на $(e^{\ln f(x)})^{g(x)}$, т. е. на $e^{g(x) \ln f(x)}$, и вычисляют предел

$$b = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x).$$

Тогда искомый предел равен e^b :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)} = e^b.$$

Пример 8. Вычислим предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} 3x)^{\frac{1}{5x}}.$$

Решение. Здесь $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} 3x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{5x} = \infty$, дана неопределенность вида 1^∞ .

Имеем $f(x) = 1 + \operatorname{tg} 3x, g(x) = \frac{1}{5x}$, поэтому $b = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{tg} 3x)}{5x}$.

Так как при $x \rightarrow 0$ имеем $\ln(1 + \operatorname{tg} 3x) \sim \operatorname{tg} 3x$, а $\operatorname{tg} 3x \sim 3x$, то $\ln(1 + \operatorname{tg} 3x) \sim 3x$.

Значит,

$$b = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{tg} 3x)}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}.$$

Итак,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} 3x)^{\frac{1}{5x}} = e^{\frac{3}{5}}.$$

Пример 9. Вычислим

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Решение. Здесь также имеем неопределенность вида 1^∞ . Раскроем ее так же, как это было сделано в предыдущем примере:

Здесь $f(x) = \cos x$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Вычислим $b = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}$. Имеем $\ln \cos x = \ln(1 + \cos x - 1)$. При $x \rightarrow 0$ $\ln(1 + (\cos x - 1)) \sim \cos x - 1$, а $\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$ (см. с. 140, 178). Значит, $\ln \cos x \sim -\frac{1}{2}x^2$, и потому

$$b = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

В итоге получаем, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Что такое показательно-степенная функция? При каких значениях аргумента она непрерывна?

2. Чему равен $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, где b и c — числа, отличные от 0? а если $b = 0$?

3. Какого вида неопределенности могут встретиться при вычислении $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$? Как раскрываются эти неопределенности?

4. Чему равен $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$? а $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$? а $\lim_{x \rightarrow a} (1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$?

5. Какие вы знаете эквивалентные бесконечно малые, связанные с показательной, логарифмической и степенной функциями?

Упражнения

Вычислите предел функции:

233. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^4 - 1}{x^4 - 41} \right)^{\frac{x^2 - 3}{x - 2}}.$

234. а) $\lim_{x \rightarrow 5-0} \left(\frac{x^3 + 1}{x^4 + 1} \right)^{\frac{1}{x-5}};$ б) $\lim_{x \rightarrow 5+0} \left(\frac{x^3 + 1}{x^4 + 1} \right)^{\frac{1}{x-5}}.$

235. а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^6 + 1}{x^6 + 7} \right)^{\frac{1}{x^3}};$ б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^6 + 1}{x^6 + 7} \right)^{\frac{x^3 + 2}{x^3 + 3}}.$

236. а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 1)^{\frac{2x^2}{1-x^3}};$ б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - 1}{x + 4} \right)^{\frac{x^3}{7+x^3}}.$

237. а) $\lim_{x \rightarrow +0} (\sin x)^{\frac{1}{x}};$ б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{x} \right)^{\frac{3-x^2}{x^2+1}}.$

$$238. a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + 2x - 1}{2x^2 - 3x - 2} \right)^x; \quad б) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3 + 2x - 1}{2x^2 - 3x - 2} \right)^x.$$

$$239. a) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}; \quad б) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x} \right)^{x+3};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{3} \right)^{\frac{6-5x}{x}}.$$

$$240. a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x; \quad б) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3} \right)^{3x+1};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}} \right)^{x-1}.$$

$$241. a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3-1}{x^2} \right)^x; \quad б) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3+1}{x^2-1} \right)^{x^2}.$$

$$242. a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2+5x+2}{2x^2-3x-1} \right)^x; \quad б) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3+5x+4}{x^2-3x+7} \right)^x.$$

$$243. a) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x^3)^{\frac{1}{\sin^3 x}}.$$

$$244. a) \lim_{x \rightarrow 5} (16 - 3x)^{\frac{1}{x-5}}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 2} (4x - 7)^{\frac{x}{x-2}}.$$

$$245. a) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \right)^{\operatorname{ctg} 2x}.$$

$$246. a) \lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\operatorname{ctg} \pi x}; \quad б) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} 2x}{1 - \sin 5x} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$247. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin 3x)}{3^{\operatorname{tg} x} - 1};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{arctg} 4x)}{e^{\sin 6x} - 1}.$$

$$248. a) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\operatorname{tg} 3x \cdot e^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{x+9} - 3}; \quad б) \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\operatorname{tg} 3x \cdot e^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{x+9} - 3}.$$

$$249. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1 + \sin 3x} - 1}{\ln(1 + \operatorname{tg} 2x)}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1 + \sin 4x} - 1}{\operatorname{tg} 3x};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[7]{1 + \sin^4 x} - 1}{\operatorname{arctg}^4 2x}; \quad г) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[5]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}.$$

$$250. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - \cos 2x)}{\ln^2(\sin 3x + 1)}; \quad \text{ б) } \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x^3 - 3}{x - e}.$$

$$251. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x - 2}{x - 1}; \quad \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{x - 2},$$

$$252. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2^x}{4 - 3 - \frac{1}{x}}; \quad \text{ б) } \lim_{x \rightarrow -0} \frac{2^x}{4 - 3 - \frac{1}{x}}.$$

$$253. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x - 2}{\ln x}; \quad \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x - 2}{\ln x}.$$

254. Функция f не определена в точке $x = 0$. Постройте функцию F , где $F = \begin{cases} f(x), & x \neq 0, \\ A, & x = 0, \end{cases}$ так, чтобы функция была непрерывна в точке $x = 0$, если:

$$\text{ а) } f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}; \quad \text{ б) } f(x) = \frac{2^{3x} - 1}{3x};$$

$$\text{ в) } f(x) = \frac{\ln(1 - 3x)}{x}; \quad \text{ г) } f(x) = \frac{\sqrt[5]{1 + 2x} - 1}{\sin x}.$$

Приложение

Варианты контрольной работы

Вариант	Упражнения			
I	№ 203а, 219,	75а, 229б,	120а, 210а,	173б, 187г, 244б
II	№ 203б, 220,	75б, 229в,	120б, 232а,	174а, 209б, 242а
III	№ 203г, 67а,	228а, 77в,	130а, 232б,	174б, 187а, 242б
IV	№ 204а, 67б,	228б, 77г,	130б, 210б,	175а, 187б, 240а
V	№ 204в, 67в,	33, 77е,	130в, 163б,	171б, 187в, 240б
VI	№ 224а, 67г,	229г, 75г,	128а, 163в,	171в, 247а, 240в
VII	№ 224в, 64,	76г, 229е,	128б, 159д,	171а, 247б, 243а
VIII	№ 226а, 66г, д, е,	77д, 228б,	122а, 159ж,	175б, 247в, 243б
IX	№ 226б, 62а,	77з, 228в,	122б, 159е,	176а, 185в, 245а
X	№ 226в, 62б,	77и, 228г,	124, 159г,	176г, 185г, 246е

Образец выполнения контрольной работы
(решение «нулевого» варианта)

204б. Найдите область существования выражения

$$\sqrt{\arccos \frac{2}{x}} + \sqrt{x^2 - x - 2}.$$

Решение. Область существования выражения задается системой неравенств

$$\begin{cases} \arccos \frac{2}{x} \geq 0, \\ x^2 - x - 2 \geq 0. \end{cases}$$

Так как $0 \leq \arccos t \leq \pi$, то неравенство $\arccos \frac{2}{x} \geq 0$ выполняется при всех

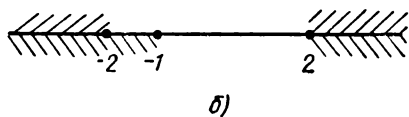
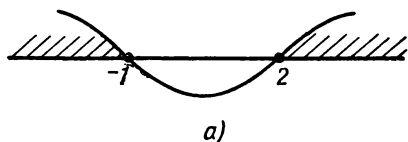


Рис. 100

x , для которых определена функция $\arcs \cos \frac{2}{x}$, т. е. при значениях x , удовлетворяющих неравенству $\left| \frac{2}{x} \right| \leq 1$. Решим это неравенство:

$$\left| \frac{2}{x} \right| \leq 1; \quad \left| \frac{x}{2} \right| \geq 1; \quad |x| \geq 2,$$

откуда

$$x \geq 2 \text{ или } x \leq -2.$$

Теперь решим неравенство $x^2 - x - 2 \geq 0$. Имеем $(x - 2)(x + 1) \geq 0$. С помощью метода интервалов находим (рис. 100, а): $x \leq -1$; $x \geq 2$.

Теперь найдем пересечение решений неравенств системы (рис. 100, б): $x \leq -2$; $x \geq 2$.

О т в е т: $D(f) =]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$.

218. $f(x) = 2^{x^2}$, $g(x) = x^3 + 1$. Найдите выражение для:

а) $f^2 + g^2$; б) $f^4 \cdot g^2$; в) $f(x^4) \cdot g(x^2)$.

Р е ш е н и е. а) $f^2 + g^2 = (2^{x^2})^2 + (x^3 + 1)^2 = 2^{2x^2} + x^6 + 2x^3 + 1$;

б) $f^4 \cdot g^2 = (2^{x^2})^4 \cdot (x^3 + 1)^2 = 2^{4x^2} (x^6 + 2x^3 + 1)$;

в) $f(x^4) \cdot g(x^2) = 2^{(x^4)^2} \cdot ((x^2)^3 + 1) = 2^{x^8} (x^6 + 1)$.

75в. Постройте график функции $|\sin x| - \sin x$.

Р е ш е н и е. Если $\sin x \geq 0$, то $|\sin x| = \sin x$, и потому

$$|\sin x| - \sin x = 0.$$

Если $\sin x < 0$, то $|\sin x| = -\sin x$, и потому $|\sin x| - \sin x = -2 \sin x$. Значит, нам надо построить график функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sin x \geq 0, \\ -2 \sin x, & \text{если } \sin x < 0. \end{cases}$$

График изображен на рисунке 101.

229а. Решите графически уравнение $2^x = 3 - x^2$.

Р е ш е н и е. Построим графики функций 2^x и $3 - x^2$ (рис. 102). Графики пересекаются в двух точках, абсциссы которых таковы: $x_1 \approx -1,6$; $x_2 = 1$.

О т в е т: уравнение имеет два корня: $x_1 \approx -1,6$; $x_2 = 1$.

126. Вычислите предел функции

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x).$$

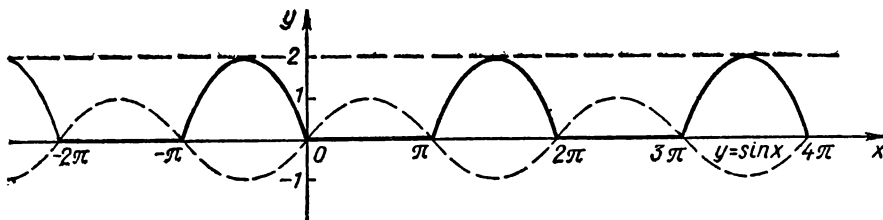


Рис. 101

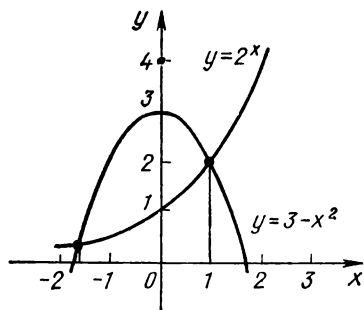


Рис. 102

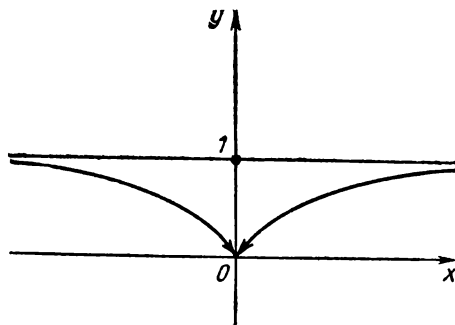


Рис. 103

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x)(\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x)}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - 5x + 6) - x^2}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x + 6}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5 + \frac{6}{x}}{\sqrt{\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2} + 1}} = \frac{-5 + 0}{1 + 1} = -2,5. \end{aligned}$$

210в. Исследуйте функцию f на непрерывность, найдите точки разрыва, установите их характер и постройте график функции:

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Решение. Функция может иметь разрыв только в точке $x = 0$. Так как функция $\operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ ограничена, то $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = 0$. Значит, $x = 0$ — точка устранимого разрыва. При $x \neq 0$ функция непрерывна.

Построим график функции. Так как $\operatorname{arctg} \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$ при $x \rightarrow +\infty$, то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{1}{x} = 1.$$

Кроме того, $f(x)$ — четная функция. Значит, ее график симметричен относительно оси ординат и $y = 1$ — горизонтальная асимптота. График схематически изображен на рисунке 103.

173а. Вычислите предел функции

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}.$$

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{5-x}-2)(\sqrt{5-x}+2)(\sqrt{2-x}+1)}{(\sqrt{2-x}-1)(\sqrt{2-x}+1)(\sqrt{5-x}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(5-x-4)(\sqrt{2-x}+1)}{(2-x-1)(\sqrt{5-x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-x}+1}{\sqrt{5-x}+2} = \frac{1+1}{2+2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

1826. Вычислите предел функции

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{\cos 2x - \cos 8x}.$$

Решение. Воспользуемся формулой

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{\cos 2x - \cos 8x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 3x \sin 2x}{2 \sin 5x \sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x}.$$

Так как $\sin 2x \sim 2x$, а $\sin 5x \sim 5x$ при $x \rightarrow 0$, то получаем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}.$$

244а. Вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 5} (16 - 3x)^{\frac{1}{x-5}}.$$

Решение. Здесь $f(x) = 16 - 3x$, $g(x) = \frac{1}{x-5}$. Вычислим

$$b = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\ln(16 - 3x)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\ln(1 + 3(5 - x))}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3(5 - x)}{x - 5} = -3.$$

Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 5} (16 - 3x)^{\frac{1}{x-5}} = e^{-3}.$$

ОТВЕТЫ

17. а) Нет; б) да (при $r = 0$). 19. а), г), д), и). 20. а) [3; 5]; б) [-4; 8]; в)]0; 6[; г) [1; 7]. 24. а) Ограниченное; б) ограниченное снизу; в) ограниченное; г) ограниченное; д) ограниченное; е) ограниченное; ж) ограниченное; з) ограниченное снизу. 30. а) 13,625; б) $2\sqrt{2} - 1$; в) $\pi^3 - 3$. 31. а) 3; б) 0; в) 1; г) 4; д) 2. 32. а) 0; б) $\frac{1}{4}$; в) 1; г) 3; д) π . 33. а) 0; б) 1; в) $\frac{\pi}{2}$; $f(-\pi)$ не существует. 34. а) 1; б) 1; в) 1; г) $\frac{5}{7}$; д) $\cos^2 3$; е) $\frac{3}{5}$. 35. а) 1; б) -1; в) 0. 36. а) $\frac{13}{5}$; б) 7; в) 3; г) $\frac{1}{2}$; д) $\frac{1}{3}$. 37. а) $\frac{25}{36}$; б) 5; в) $-\frac{3}{4}$; г) $-5\frac{1}{4}$; д) 54,41; е) $-\pi^2 - 4$; ж) $-\frac{\pi^2}{16}$. 38. а) $\begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases}$
- б) $\begin{cases} 2 - 3x, & x \leq \frac{2}{3}, \\ 3x - 2, & x > \frac{2}{3}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3 - 2x, & x < 1, \\ 1, & 1 \leq x < 2, \\ 2x - 3, & x \geq 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - 9, & x < -3, \\ 9 - x^2, & -3 \leq x < 3, \\ x^2 - 9, & x \geq 3; \end{cases}$
- д) $\begin{cases} 2 - x, & 2 \leq x < 3, \\ x - 2, & 2 \leq x < 3, \\ 4 - x, & 3 \leq x < 4, \\ x - 4, & x > 4. \end{cases}$ 41. а) $P = 2x + 2\sqrt{4R^2 - x^2}$; б)]0; 2R[; в) [-2R; 2R].
42. а) $ax - \frac{2x^2\sqrt{3}}{3}$; б) $\left] 0; \frac{a\sqrt{3}}{2} \right[$; в) $] -\infty; +\infty[$. 43. $s = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{(l-x)^2 + b^2}$. 44. а) $S(x) = \begin{cases} ax - \frac{(x-b)^2}{\sqrt{3}}, & b < x \leq b + \frac{a\sqrt{3}}{2}; \\ ax, & 0 \leq x \leq b \end{cases}$
- б) $\left[0; b + \frac{a\sqrt{3}}{2} \right]$.
45. а) [0; 16]; б) [-8; $+\infty$]; в) [-2; 2]; г) [0; 2]; д) {1}; е) [0; 3].
46. а) $] -\infty; +\infty[$; б) $] -\infty; -3[\cup] -3; 3[\cup] 3; +\infty[$; в) $] -\infty; -2[\cup] -2; -\frac{1}{2}[\cup] -\frac{1}{2}; +\infty[$; г) $] -\infty; -2[\cup] -2; 2[\cup] 2; +\infty[$; д) $] -\infty; -1[\cup] -1; 0[\cup] 0; 1[\cup] 1; +\infty[$; е) $] -\infty; \frac{9}{4}[$; ж) $] -\infty; -2[\cup] 2; +\infty[$;
- з) $] -\infty; -1[\cup] -1; +\infty[$; и) $] -\infty; 0[\cup] 1; +\infty[$. 47. а) $\{x \mid x \neq k, k \in \mathbb{Z}\}$; б) $\{x \mid x \geq 0, x \neq n - \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N}\}$; в) $\{x \mid x \neq (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}\}$.
48. а)]0; $+\infty$ [; б) $] -\infty; 0[$; в) $] -\infty; 2[\cup] 2; 4[\cup] 4; +\infty[$.
49. а) $\left\{ x \mid x \neq \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\left\{ x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
50. а) $] -\infty; 1[\cup] 8; +\infty[$; б) $] -\infty; 2[\cup] 3; +\infty[$; в) [-3; 0] \cup [3; $+\infty$ [.
51. а)]4; 5] \cup [6; $+\infty$]; б) [-4; 1] \cup [2; 3]. 52. [-5; 0] \cup [4; 5]. 53. [-4; -2[\cup] -2; 0[\cup] 0; 2[\cup] 2; 4]. 54. $] -\infty; 7[\cup] 7; 8]$. 55. а) [-4; $-\pi$] \cup] 0; π]; б) $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6} \right]$. 56. $] -5; -\frac{3\pi}{4}[\cup] -\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[\cup] \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}[\cup] \frac{5\pi}{4}; 5]$. 58. Нет. На [1; $+\infty$ [. 62. а) $\frac{1}{4}(-x^2 + 4x + 1)$; б) $x^2 - 2$. 63. а) $\sin^3 x$;

6) $\sqrt[3]{\cos x + 1}$; в) $\operatorname{tg}(2x^2 + 10x + 6)$; г) $1 + \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^6}$. 64. а) $\sqrt[3]{\sin x^2} - 1$;

б) $\operatorname{tg}\left(\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}\right)$.

65. а) $\operatorname{ctg}^2 2x - 3 \operatorname{ctg} 2x + 2$; б) $\operatorname{ctg}(2x^2 - 10x + 2)$; в) $\sqrt[3]{\operatorname{ctg} 2x} + \operatorname{tg} 2x$.

66. а) $\sin x^2 + x^3 + 1$; б) $\sin^2 x^2 \cdot (x^6 + 1)$; в) $\sqrt{\sin x^2} + x \sqrt{x} + 1$; г) $\sin(x^3 + 1)^2$;

д) $\sin^3 x^2 + 1$; е) $\sin(\sin^2 x^2)$; ж) $((x^3 + 1)^3 + 1)^3 + 1$.

67. а) $\begin{cases} 1, & x \in [-\sqrt{3}; -1] \cup [1; \sqrt{3}], \\ 0, & x \in]-\infty; -\sqrt{3}[\cup]1; \sqrt{3}[; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 2, & |x| > 1; \end{cases}$ в) 1; г) $2 - x^2$.

68. а) $\sin(\sin(\sin x))$; б) $\sin(\sin^2(x - 1))$;

в) $\sin^2(\sin x - 1)$.

78. а) $\inf f(x) = 0$; $\sup f(x) = 64$; б) $\inf f(x) = -\frac{9}{4}$; $\sup f(x) = 40$;

в) $\inf f(x) = -\frac{9}{4}$; г) $\sup f(x) = -\frac{1}{4}$;

д) $\sup f(x) = 1$; е) $\inf f(x) = 0$; $\sup f(x) = 1$.

81. а) Возрастает; б) возрастает; в) убывает; г) немонотонна; д) возрастает; е) немонотонна; ж) не убывает; з) немонотонна; и) убывает; к) возрастает.

82. а) На $]-\infty; 2]$ убывает, на $[2; +\infty[$ возрастает;

б) на $]-\infty; 3]$ возрастает, на $]3; +\infty[$ убывает;

в) на $]-\infty; 1[$ убывает и на $]1; +\infty[$ убывает;

г) на $\left[2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$, убывает;

на $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pi + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$, возрастает;

на $\left[\pi + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$, возрастает;

на $\left[\frac{3\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$, убывает;

83. а) Четна; б) ни четна, ни нечетна; в) четна; г) ни четна, ни нечетна. 84. а) Четна;

б) четна; в) нечетна; г) ни четна, ни нечетна. 85. а) Ни четна, ни нечетна; б) нечетна;

в) четна. 87. а) Да; б) нет. 89. а) Четна; б) четна; в) нечетна; г) нечетна.

90. а) 0,5; -0,8; 0,3; в) $x - 2n$. 91. $\frac{T}{a}$. 92. а) 6π ; б) $\frac{\pi}{2}$; в) 2π ; г) 2; д) $\frac{\pi}{2}$.

95. в) $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$; $f\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = 0$; $f\left(21\frac{1}{3}\pi\right) = 0$; $f\left(-\frac{100\pi}{3}\right) = 0$; г) нет.

96. а) 1, 2, 6, 24, 120; б) 0, $\frac{3}{2}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{15}{4}$, $\frac{24}{5}$; в) 0, 0, 1, 4, 10; г) 2, 4, 8, 16, 32.

97. 0, 1, 1, 3, 5. 98. а) $4n^2 + 1$; б) $n^2 + 6n + 10$; в) $n^6 + 1$. 99. а) $a_n = 3^{n-1}$;

б) $n^3 + 1$; в) $\frac{n}{n+1}$; г) $\sqrt{n(n+1)}$; д) $\frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{(n+1)^2(n+2)^2}$. 118. а) $\frac{7}{5}$; б) 0. 119. а) $+\infty$;

б) $-\infty$. 120. а) 2; б) 180. 121. а) 0; б) $\frac{2}{3}$. 122. а) 3; б) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$. 123. а) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{1}{2}$;

в) 0. 124. 2. 125. а) 1; б) -2; в) 1. 126. -2,5. 127. а) $\frac{1}{6}$; б) $+\infty$. 128. а) 8;

б) 2 при $x \rightarrow +\infty$, -2 при $x \rightarrow -\infty$. 129. $-\frac{2}{3}$. 130. а) $y = \frac{2}{3}$; б) $y = x - 7$;

в) $y = 3x - 7$; г) $y = 0$; д) $y = x$; е) $y = x$ при $x \rightarrow +\infty$, $y = -x$ при $x \rightarrow -\infty$;

- ж) $y = 0$. 132. а) $-\frac{1}{27}$; б) $-\frac{5}{4}$; в) 0. 133. а) 1; б) 3; в) $\frac{1}{3}$. 134. $\frac{4}{3}$. 135. а) 0; б) 0. 137. 1. 138. $2\pi R$. 144. а) $\frac{1}{3}$; б) 0. 145. а) ∞ ; б) 0; в) ∞ . 146. а) -2 ; б) $-1,5$; в) $-\frac{1}{4}$; г) -1 . 147. а) -3 ; б) $\frac{2}{3}$. 148. а) $f(a-0) = 3$, $f(a+0) = -3$; б) $f(a-0) = -3$, $f(a+0) = 3$; в) $f(a-0) = +\infty$, $f(a+0) = +\infty$; г) $f(-0) = -1$, $f(+0) = -1$, $f(1-0) = 0$, $f(1+0) = 0$. 149. 27. 150. $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = -1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{2n}\right) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ не существует.
151. $-2, -1, 2$. 153. а) $\delta < 2$; б) $\delta < \sqrt{17} - 4$; в) $\delta < \sqrt{16,001} - 4$. 158. а) $-\frac{1}{2}$; б) $\frac{1+3\sqrt{3}}{8}$; в) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
159. а) $x = 0$ — точка разрыва 2-го рода; б) $x = -2$, $x = 2$ — точки разрыва 2-го рода; в) $x = 2$ — точка разрыва 2-го рода; г) $x = 1$ — точка разрыва 1-го рода; д) $x = 2$ — точка устранимого разрыва, $x = -2$ — точка разрыва 2-го рода; е) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, — точки разрыва 2-го рода; ж) $x = 0$ — точка разрыва 2-го рода.
162. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin e^2$; г) 1. 163. а) $x = 0$, $x = 1$ — точки разрыва 2-го рода; б) $x = 0$ — точка разрыва 1-го рода; в) $x = 1$ — точка разрыва 1-го рода; г) $x = 2$ — точка разрыва 2-го рода; д) $x = 0$ — точка разрыва 2-го рода.
170. а) 4; б) $\frac{4}{\pi}$. 171. а) $\frac{3}{4}$; б) $-\frac{1}{3}$; в) 0; г) 2. 172. а) $-\frac{1}{56}$; б) $\frac{1}{12}$; в) $\frac{1}{8}$. 173. а) $\frac{1}{2}$; б) 4. 174. а) -1 ; б) -1 . 175. а) 3; б) $-\frac{2}{3}$. 176. а) -3 ; б) $\sqrt{2}$; в) 1; г) $-\frac{\sqrt{2}}{6}$. 179. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{2}{5}$; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{3}{7}$; д) $\frac{4}{5}$; е) $\frac{4}{3}$. 180. а) 0; б) 0; в) $\frac{2}{\pi}$; г) $\frac{4}{\pi^2}$. 181. а) $\frac{9}{8}$; б) $\frac{45}{16}$; в) $\frac{225}{4}$. 182. а) 5; б) $\frac{2}{5}$. 183. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3}$. 184. а) $\frac{1}{4}$; б) 0. 185. а) 0; б) 20; в) $\frac{1}{18}$; г) $\frac{1}{8}$. 186. а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$. 187. а) $\frac{2}{\pi}$; б) $\frac{1}{2}$; в) 0; г) $\frac{1}{2}$. 188. а) 1; б) $\frac{1}{4}$. 189. а) $\frac{64}{125}$; б) $-\frac{343}{3}$. 190. а) $-\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3}$. 191. а) $f(-0) = -1$, $f(+0) = 1$; б) $f(-0) = -\sqrt{2}$, $f(+0) = \sqrt{2}$; в) $f(1-0) = -4$, $f(1+0) = 4$; г) $f(8-0) = -\frac{1}{6}$, $f(8+0) = \frac{1}{6}$. 192. а) $A = \frac{3}{2}$; б) $A = 4$; в) $A = 6$. 193. а) $]-\infty; -2[\cup]-2; -1[\cup]\frac{1}{2}; 2[$; б) $]-6; -2[\cup]3; +\infty[$; в) $]-4; -3[\cup]-2; 0[\cup]1[$; 3[$\cup]4; +\infty[$. 194. а) Да; б) да; в) да. 195. 1, 53. 198. а) Нет, да; б) нет. 200. а) $\frac{4-3x}{x+1}$; б) $2 + \sqrt{4-x}$; в) $2 - \sqrt{4-x}$; г) $\sqrt[3]{x^3+27}$; д) $\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$. 203. а) $\left[1; \frac{5}{3}\right]$; б) $[-1; 4]$; в) $]-\infty; -2[\cup]-2; 2[\cup]2; +\infty[$; г) $]-\infty; +\infty[$. 204. а) $]-1; 3[\cup]3; 6[$; б) $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$; в) $\left[-2; -\frac{1}{2}\right]$. 205. а) Четная; б) нечетная; в) четная; г) ни четная, ни нечет-

- ная; д) ни четная, ни нечетная. 206. а) Возрастает на $] - \infty; + \infty[$; б) возрастает на $[-1; 1]$; в) убывает на $] - \infty; 0]$, возрастает на $[0; + \infty[$.
207. а) 2; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{75}$. 208. а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{3}{2}$. 209. а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{8}$.
210. а) $x = 0$ — точка разрыва 1-го рода;
б) $x = 0$ — точка разрыва 1-го рода;
в) $x = 0$ — точка устранимого разрыва. 211. $A = \frac{1}{2}$. 212. а) $\alpha < 0$;
- б) $a - 1 < 0$; в) $\alpha > \beta$. 214. а) $\frac{b}{1-a}$; б) 4,828. 215. $\ln(n+1)$. 218. а) $2^{2x^2} + (x^3 + 1)^3$; б) $2^{4x^2} (x^3 + 1)^2$; в) $2^{x^2} (x^4 + 1)$. 220. а) x^4 ; б) e^{2x} ; в) e^{x^2} ; г) ee^x .
221. а) Ни четная, ни нечетная; б) четная; в) четная. 222. а) Возрастает на $]0; + \infty[$; б) убывает на $]0; + \infty[$; в) возрастает на $[1; + \infty[$; г) убывает на $] - \infty; 3]$, возрастает на $[3; + \infty[$; д) возрастает на $] - \infty; 4]$, убывает на $[4; + \infty[$. 223. а) $] - \infty; \frac{4}{5}[$;
- б) $] - \infty; 1[\cup]3; + \infty[$; в) $] - 2; 1[$; г) $] - 6; 1[\cup]3; + \infty[$; д) $] - \infty; -3[\cup] - 3; 3[\cup]3; + \infty[$. 224. а) $] - 3; -1[\cup]2; 3[$; б) $] - \infty; -3[\cup] - 3; -2[\cup]4; + \infty[$; в) $] - \infty; 1[\cup]8; 11[\cup]11; 12[$. 225. а) $[-1; 0[\cup]1; 1,5[\cup]1,5; 2[$;
- б) $[-4; 1[\cup]3; 4]$. 226. а) $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k \right]$; б) $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \right]$; в) $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{5\pi}{6} + \pi k \right]$. 227. а) $[0; 3[$; б) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$.
232. а) $x = -3$ — точка разрыва 2-го рода; б) $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, — точки разрыва 2-го рода. 233. 64. 234. а) $+\infty$; б) 0. 235. а) 1; б) 1. 236. а) 0; б) $+\infty$. 237. а) 0;
- б) 1. 238. а) 0; б) $+\infty$. 239. а) e ; б) e^4 ; в) $\frac{1}{e^2}$. 240. а) e^{-2} ; б) e^9 ; в) $e^{-\frac{1}{2}}$. 241. а) 1;
- б) e^2 . 242. а) e^4 ; б) e^2 . 243. а) $e^{\frac{1}{2}}$; б) e^2 . 244. а) e^{-3} ; б) e^4 . 245. а) 1; б) e .
246. а) e^{-1} ; б) $e^{-\frac{1}{2}}$; в) e^7 . 247. а) 4; б) $-\frac{3}{\ln 3}$; в) $\frac{2}{3}$. 248. а) $+\infty$; б) 0. 249. а) $\frac{3}{4}$;
- б) $\frac{4}{15}$; в) $\frac{1}{112}$; г) $\frac{1}{5}$. 250. а) $\frac{2}{9}$; б) $\frac{3}{e}$. 251. а) $2 \ln 2$; б) $4 (\ln 2 - 1)$. 252. а) $\frac{1}{4}$;
- б) 0. 253. а) $-\infty$; б) $+\infty$. 254. а) $A = e$; б) $A = \ln 2$; в) $A = -3$; г) $A = \frac{2}{5}$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава I. Отображения. Действительные числа	6
§ 1. Отображения множеств и их виды	6
1. Отображения множеств	6
2. Обратное отображение	9
3. Композиция отображений	9
§ 2. Действительные числа	12
4. Аксиомы множества положительных действительных чисел	12
5. Координатный луч	15
6. Условие единственности разделяющего числа	16
7. Теорема Евдокса — Архимеда и ее следствия	16
8. Умножение и деление в R_+	18
9. Десятичная запись положительных действительных чисел. Измерение отрезков	19
10. Множество действительных чисел и его свойства	21
11. Координатная прямая. Окрестности	24
12. Ограниченные числовые множества. Точная верхняя и точная нижняя грани числовых множеств	26
Глава II. Числовые функции	32
§ 3. Функции и выражения	32
13. Определение числовой функции	32
14. Рациональные функции	33
15. Иррациональные функции	36
16. Тригонометрические функции	36
17. Композиция числовых функций	39
18. Таблицы значений функций. Функциональные шкалы	40
19. График функции	41
20. «Сложение» и «умножение» графиков функций	45
§ 4. Свойства функций	50
21. Ограниченные и неограниченные функции	50
22. Монотонные функции	53
23. Четные и нечетные функции	56
24. Периодические функции	59
25. Последовательности	62
Глава III. Предел функции	68
§ 5. Предел функции на бесконечности	68
26. Бесконечно малые функции	68
27. Предел функции при $x \rightarrow +\infty$	73
28. Другие формулировки определения предела функции при $x \rightarrow +\infty$	75
29. Физический смысл понятия предела функции при $x \rightarrow +\infty$	76
30. Свойства пределов функций при $x \rightarrow +\infty$	78

31. Предел функции при $x \rightarrow -\infty$ и при $x \rightarrow \infty$	81
32. Теорема о пределе монотонной ограниченной функции	82
33. Бесконечно большие функции и их свойства	83
§ 6. Вычисление пределов функций при $x \rightarrow \infty$	88
34. Вычисление предела суммы, произведения и частного	88
35. Вычисление предела отношения двух многочленов при $x \rightarrow \infty$	90
36. Вычисление предела корня	92
37. Асимптоты	93
§ 7. Предел последовательности	96
38. Предел по множеству. Предел последовательности	96
39. Теорема о стягивающейся системе отрезков	102
40. Число e	104
§ 8. Предел функции в точке	109
41. Определение предела функции в точке	109
42. Свойства предела функции	111
43. Предел по множеству. Односторонние пределы	114
44. Теорема о пределе монотонной ограниченной функции	116
45. Бесконечные пределы. Вертикальные асимптоты	117
Глава IV. Непрерывные функции	123
§ 9. Непрерывность функции в точке	123
46. Непрерывные и разрывные процессы. Непрерывные функции	123
47. Арифметические операции над непрерывными функциями	126
48. Предел композиции функций. Непрерывность композиции функций	127
49. Свойства функций, непрерывных в точке	129
50. Точки разрыва функции	130
§ 10. Техника вычисления пределов функций	135
51. Предел непрерывной функции. Простейшие случаи раскрытия неопределенностей	135
52. Предел функции $\frac{\sin x}{x}$ при $x \rightarrow 0$	137
53. Порядок бесконечно малых. Эквивалентные бесконечно малые	139
§ 11. Свойства непрерывных функций	143
54. Теорема о промежуточном значении	143
55. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке	147
56. Обратная функция	149
57. Обратные тригонометрические функции	152
Глава V. Показательная и логарифмическая функции	159
§ 12. Показательная и логарифмическая функции	159
58. Показательная функция на множестве рациональных чисел	159
59. Степень с иррациональным показателем	161
60. Показательная функция на множестве действительных чисел	162
61. Свойства степеней с действительными показателями	163
62. Логарифмическая функция	164
63. Гиперболические функции	167
64. Элементарные функции	169
§ 13. Пределы, связанные с показательной и логарифмической функциями	172
65. Предел показательной степени функции	172
66. Предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	175
67. Вычисление пределов, связанных с показательной и логарифмической функциями	177
Варианты контрольной работы	182
Ответы	186

*Наум Яковлевич Виленкин
Александр Григорьевич Мордкович*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Введение в анализ

Редактор *Л. В. Туркестанская*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Технический редактор *М. И. Смирнова*
Корректоры *О. С. Захарова, К. А. Иванова*

Н/К

Сдано в набор 16.11.82. Подписано к печати 04.05.83. Формат 60×90^{1/16}. Бум. типограф. № 2. Гарнит. лит. Печать высокая. Усл. печ. л. 12. Усл. кр. отт. 12,25. Уч.-изд. л. 12,24. Тираж 27000 экз. Заказ 479. Цена 40 коп. Заказное.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, Москва. 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, Саратов, ул. Чернышевского, 59.

40 к.

